

EC 132. Algèbre linéaire

Partie 2: Décomposition d'un espace vectoriel en s.e.v.

Jean-François Culus

27 janvier 2016

- Opérations ensemblistes conservant la structure de s.e.v.
- Somme de deux s.e.v. et généralisation
- Somme directe de deux s.e.v.
- Généralisation à la somme directe de plusieurs s.e.v.

Exercice : Opérations conservant la notion de s.e.v.

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E .

Montrer alors que $F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2$ sont des s.e.v. de E .

Montrer que si $F_1 \cup F_2$ est un s.e.v. de E , alors $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

Sous-espace engendré par une partie

Définition : Sous-espace engendré par une partie

Soit $A \subset E$. On appelle *sous-espace engendré par la partie A* le plus petit s.e.v. de E contenant A ; on le note $\text{Vect}(A) = \langle A \rangle$.

Proposition

$\langle A \rangle$ est obtenu en considérant l'ensemble des s.e.v. de E contenant A et en en faisant l'intersection.

De manière équivalente, $\langle A \rangle$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition

Soient $F_1, F_2, \dots, F_n$ des s.e.v. de E . On désigne par $\sum_{i=1}^n F_i$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments des F_i à coefficients dans $\mathcal{K}$. $\sum_{i=1}^n F_i$ est un s.e.v. de E , contenant chaque F_i .

Somme directe de 2 s.e.v.

Définition : Somme directe de 2 s.e.v.

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que la somme $F_1 + F_2$ est directe si, pour tout élément $z \in F_1 + F_2$, il existe un unique couple $(x_1; x_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $z = x_1 + x_2$, ou encore que l'écriture de x comme somme d'un élément de F_1 et de F_2 est unique.

On note alors $F_1 \oplus F_2$ la somme de deux s.e.v. $F_1 + F_2$.

Définition : Supplémentaire

On dit que les s.e.v. F_1 et F_2 de E sont supplémentaires si $F_1 + F_2 = E$ et si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ (ou encore qu'ils sont en somme directe dans E).

Somme directe de plusieurs s.e.v.

Définition : Somme directe de plusieurs s.e.v.

Soient $F_1, F_2, \dots, F_n$ des s.e.v. de E . La somme $\sum_{i=1}^n F_i$ est directe si l'écriture de tout élément z de $\sum_{i=1}^n F_i$ en somme $z = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ d'éléments de $x_i \in F_i$ est unique.

De manière équivalente, la somme $\sum_{i=1}^n F_i$ est directe si $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$, si $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0_E$ alors $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Caractérisation d'une somme directe

La somme $\sum_{i=1}^n F_i$ est directe si et seulement si

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \left(\sum_{i=1}^k F_i \right) \cap F_{k+1} = \{0_E\}.$$