

EC 132. Algèbre linéaire

Partie 1: Généralités sur les espaces vectoriels

Jean-François Culus

27 janvier 2016

Plan

- Structure d'espace vectoriel
- Sous-espaces vectoriels
- Applications linéaires

Rappel : Corps

Définition : Corps

On dit que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps si $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe abélien et $(\mathbb{K}^*, \times)$ est un groupe.

De manière équivalente, tout élément non nul du groupe commutatif $(\mathbb{K}, +)$ est inversible pour la multiplication.

Exemples : $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, et $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des corps (commutatifs), alors que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ n'en est pas un.

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif.

Espace vectoriel

Définition : Espace vectoriel

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un ensemble non vide E muni d'une loi de composition interne $+$ telle que $(E, +)$ soit un groupe commutatif, et d'une loi de composition externe $\cdot$ telle que $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2$

- $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$
- $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

Exemples d'espaces vectoriels

Exemples d'espaces vectoriels :

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ droite vectorielle réelle
- $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ plan vectoriel
- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ espace vectoriel réel de dimension n
- $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$
- $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ ensemble des fonctions réelles de variable réelle

Caractérisation équivalente d'un espace vectoriel

Définition : Combinaison linéaire

On appelle combinaison linéaire d'éléments de E à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute somme finie de la forme $\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n$, où les λ_i sont des éléments de $\mathbb{K}$ et où les x_i sont des éléments de E .

Proposition

$(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ si et seulement si toute combinaison linéaire d'éléments de E à coefficients dans $\mathbb{K}$ appartient à E (ou encore E est stable par combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$).

Sous-espaces vectoriels

A présent, on désigne par $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Sous-espaces vectoriels

Un sous ensemble F non vide de E est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ si $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition : Caractérisation pratique d'un s.e.v. de E

$F \neq \emptyset$ est un s.e.v. de E si F est stable pour l'addition et le produit externe, ou encore s'il est stable par combinaison linéaire d'éléments de E .

Méthodes pour montrer que F est un s.e.v. de E

Méthode 1 : En deux temps

- Pour tout $(x, y) \in F^2$, on montre que $x + y \in F$ (stable par somme interne)
- Pour tout $x \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x \in F$ (stable par produit par un scalaire)

Méthode 2 : En un temps

On montre que F est stable par combinaison linéaire d'éléments de F à coefficients dans $\mathbb{K}$, i.e.

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$$

Exemples de sous-espaces vectoriels

- Si E est un espace vectoriel, les ensembles $\{0_E\}$ et E sont-ils des s.e.v. de E ?
- $\{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ est-il un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$? Est-ce que $\{(2, x); x \in \mathbb{R}\}$ en est aussi un ?
- L'ensemble des suites dont le terme de rang 4 est nul est-il un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
- L'ensemble des suites bornées est-il un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
- L'ensemble $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est-il un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
- L'ensemble des fonctions croissantes est-il un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
- $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(2) = 0\}$ est-il un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

Applications linéaires

Définition : Applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On dit que $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire si

- $\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x).$

Exemples d'applications linéaires

Pour chacune des applications suivantes, dire si elle est linéaire ou non

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (y, x, x - y)$
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x, 1, y)$
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x, 0, y)$
- $\Phi : \mathcal{D}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \Phi(f) = f'$
- $\Phi : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$
- $\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}, \Phi(f) = f(0)$
- $\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \Phi(f) = 2f$
- $\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \Phi(f) = f + 2$

Proposition : Image direct et réciproque de s.e.v par une appli. linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

- Si A est un s.e.v. de E , alors $f(A)$ est un s.e.v. de F
- Si B est un s.e.v. de F , alors $f^{-1}(B)$ est un s.e.v. de E
- $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont donc des s.e.v. de respectivement E et F .

Théorème : Injectivité d'une application linéaire

Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire, alors f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démo : Soit $f \in \mathcal{L}(E; F)$ injective. Alors

$f(x + 0_E) = f(x) = f(x) + f(0_E)$ d'où $f(0_E) = 0_F$. Par injectivité de f , on en déduit que 0_E est l'unique antécédent de 0_F d'où $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{0_E\}$.

Réciproquement si $f^{-1}(0_F) = \{0_E\}$ alors supposons $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Donc $f(x) - f(y) = 0_F$ soit $f(x - y) = 0_F$. Il s'ensuit que $x - y = 0_E$ et donc $x = y$: f est injective.

Structure de l'ensemble des applications linéaires

Théorème

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On désigne par $\mathcal{L}(E; F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F . Alors $(\mathcal{L}(E; F); +; \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Démo : Soient $(f; g) \in \mathcal{L}(E; F)$ et $(\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors $\lambda \cdot f + \mu \cdot g \in \mathcal{L}(E; F)$ d'où $\mathcal{L}(E; F)$ est bien un sous-espace vectoriel de F^E l'ensemble des fonctions de E dans F .

Structure de $\mathcal{G}l(E)$

Définition : Ensemble $\mathcal{G}l(E)$

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. On désigne par $\mathcal{G}l(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E qui sont bijectives. On appelle cet ensemble le groupe linéaire de E .

Exercice : Structure de $\mathcal{G}l(E)$

Pour quelle loi de composition interne l'ensemble $\mathcal{G}l(E)$ est-il un groupe ?
 $(\mathcal{G}l(E), +, \cdot)$ est-il un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ?