

Problème d'algèbre linéaire 1: Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2

Partie I: Equation différentielle d'ordre 1 (à coefficients non constants)

Dans cette partie, on souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_1) : $y' = ay + b$ où a et b sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans lui-même. On appelle solution de cette équation différentielle sur I toute fonction f dérivable sur I et à valeur dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in I, f'(x) = a(x)f(x) + b(x)$.

A. Résolution de l'équation homogène

On appelle équation homogène associée à l'équation différentielle l'équation différentielle $(\mathcal{H}_1)$: $y' = ay$.

1. Soit $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_1)$ l'ensemble des solutions réelles de $(\mathcal{H}_1)$. Montrer que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_1)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
2. On suppose que f est solution de $(\mathcal{H}_1)$ sur $\mathbb{R}$ et que f est non identiquement nulle sur $\mathbb{R}$: aussi, soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$. On suppose de plus que $f(x_0) > 0$.
 - (a) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $f > 0$ sur $]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$.
 - (b) En déduire que $\forall x \in]x_0 - \eta; x_0 + \eta[, y(x) = \lambda \exp\left(\int_{x_0}^x a(t)dt\right)$ où λ est une constante réelle strictement positive.
3. A toute fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$, on associe la fonction $z(x) = y(x)\exp\left(-\int_{x_0}^x a(t)dt\right)$. Montrer que y est solution de $(\mathcal{H}_1)$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $z' = 0$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_1)$ des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{H}_1)$ sur $\mathbb{R}$. Précisez la dimension de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_1)$ en tant qu'espace vectoriel réel.

B. Résolution de l'équation (E_1)

1. Montrer que les solutions de l'équation (E_1) sur l'intervalle I sont les fonctions y définies par $\forall x \in I, y(x) = u(x) + \lambda \exp\left(\int_{x_0}^x a(t)dt\right)$ où $x_0 \in I, \lambda \in \mathbb{R}$ et u une solution particulière de l'équation $y' = ay + b$.
2. **Méthode de la variation de la constante**
Soit $x_0 \in I$ et v la fonction définie par $v(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x a(t)dt\right)$ une solution particulière de l'équation homogène. A toute fonction y dérivable sur I , on associe la fonction $\lambda(x) = \frac{y(x)}{v(x)}$.
 - (a) Montrer que la fonction λ est bien définie et est dérivable sur I . Donner une expression de λ' .
 - (b) Montrer que si y est solution de (E_1) , alors λ est une primitive de $\frac{b}{v}$. En déduire que $\forall x \in I, \lambda(x) = \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{v(t)}dt + \mu = \lambda_0(x) + \mu$.
 - (c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) dans $\mathbb{R}$.

C. Exemple

On souhaite obtenir les solutions de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$ sur $\mathbb{R}$.

- (a) Vérifier qu'une solution de l'équation homogène associée est $y(x) = \lambda e^{-x^2}$.
- (b) En utilisant la méthode de la variation de la constante, montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$ sont les fonction $y(x) = \int_0^x e^{t^2-x^2} dt + \mu e^{-x^2}$.

Partie II: Equation différentielle à coefficient constant d'ordre 2

Dans cette partie, on considère a, b, c trois complexes (éventuellement tous réels), avec $a \neq 0$. On cherche l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle homogène $(\mathcal{H}_2)$: $ay'' + by' + cy = 0$. La partie **B.** utilise les résultats de la partie **A.** et on pourra éventuellement utiliser les résultats de la partie **I** en les étendant aux cas complexe.

A. Résolution de l'équation homogène dans $\mathbb{C}$

Dans cette partie, on s'intéresse à la résolution de cette équation dans $\mathbb{C}$ (ie. on cherche les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ à valeurs complexes) vérifiant l'équation $(\mathcal{H}_2)$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ est solution de $(\mathcal{H}_2)$ si et seulement si $\lambda \in \mathbb{C}$ est solution de l'équation polynomiale $aX^2 + bX + c = 0$. On désigne par *polynôme caractéristique de $(\mathcal{H}_2)$* le polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une solution du polynôme caractéristique P . Montrer alors qu'une fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ deux fois dérivable est solution de l'équation $(\mathcal{H}_2)$ si et seulement si la dérivée z' de la fonction $z : x \mapsto e^{-\lambda x}y(x)$ est solution de l'équation différentielle d'ordre 1: $aZ'(x) + (2a\lambda + b)Z(x) = 0$.
3. Dans cette question, on suppose que le discriminant Δ du polynôme caractéristique P est nul. On désigne par λ la racine double de P .
Montrer alors que les fonctions $x \mapsto e^{\lambda x}$ et $x \mapsto xe^{\lambda x}$ sont solutions de l'équation $(\mathcal{H}_2)$.
En déduire que l'ensemble des solutions complexes de $(\mathcal{H}_2)$ est $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_2) = \{(\alpha + \beta x)e^{\lambda x}; (\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2\}$.
4. Dans cette question, on suppose que le discriminant Δ du polynôme caractéristique P est non nul: on désigne par λ_1 et λ_2 les deux racines (a priori complexes) de P .
Montrer alors que les fonctions $x \mapsto e^{\lambda_1 x}$ et $x \mapsto e^{\lambda_2 x}$ sont solutions de l'équation différentielle homogène $(\mathcal{H}_2)$.
En déduire que l'ensemble des solutions complexes $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_2)$ est $\{\alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x}; (\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2\}$.

B. Résolution de l'équation homogène dans $\mathbb{R}$

A présent, on considère que les coefficients a, b, c sont réels (avec $a \neq 0$) et on cherche les solutions réelles de $(\mathcal{H}_2)$, c'est-à-dire les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathcal{H}_2)$.

1. **Cas $\Delta \geq 0$**
En utilisant les résultats de la partie précédente, donner l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_2)$ dans les cas où $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$.
2. **Cas $\Delta < 0$**
On désigne alors λ_1 et λ_2 les deux solutions complexes non réelles de l'équation caractéristique.
 - (a) Montrer que les racines complexes λ_1 et λ_2 du polynôme caractéristique P sont conjuguées l'une de l'autre. On notera alors $\lambda_1 = u + iv$ et $\lambda_2 = u - iv$, avec $u \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^*$.
 - (b) Montrer alors que les fonctions $x \mapsto e^{ux} \cos(vx)$ et $x \mapsto e^{ux} \sin(vx)$ sont solutions de l'équation $(\mathcal{H}_2)$.
 - (c) En déduire que $\{x \mapsto \alpha e^{ux} \cos(vx) + \beta e^{ux} \sin(vx); (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_2)$.
 - (d) Réciproquement, soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{H}_2)$.
Montrer qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $y(x) = (\gamma e^{ivx} + \delta e^{-ivx})e^{ux}$, où γ et δ sont des constantes complexes.
Montrer alors que $\bar{\delta} = \gamma$.
En déduire que $\gamma e^{ivx} + \delta e^{-ivx} = \alpha \cos(vx) + \beta \sin(vx)$ avec $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.
Conclure en précisant $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_2)$.