

EC 222. Algèbre linéaire

Partie 4: Complément sur la théorie de la dimension (finie)

Jean-François Culus

1^{er} février 2016

- Rappel : E.v. de dimension finie
- Application à l'égalité de s.e.v.
- Application à la somme directe de s.e.v.
- Applications aux familles libres et génératrices.
- Application aux applications linéaires :
Théorème du rang

Rappel : Espace vectoriel de dimension finie

Définition : Dimension

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de cardinal n de E . Alors, toutes les bases de E ont pour cardinal n , et on note $\dim(E) = n$, appelée *dimension* de l'espace vectoriel E .

Proposition

Si F est un s.e.v. de E , alors $\dim(F) \leq \dim(E)$.

Si $F \subset G$ sont deux s.e.v. de E , alors $\dim(F) \leq \dim(G)$.

Proposition

Soient F et G deux s.e.v. de E tels que

- $F \subset G$
- $\dim(F) = \dim(G)$.

Alors, les deux s.e.v. sont égaux ($F = G$).

Proposition : Somme directe de 2 s.e.v.

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Aussi, la somme $F + G$ est directe si et seulement si
 $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Proposition : Somme directe de plusieurs s.e.v.

La somme $\sum_{i=1}^k F_i$ est directe si et seulement si
 $\dim\left(\sum_{i=1}^k F_i\right) = \sum_{i=1}^k \dim(F_i)$.

Proposition

Si E est un s.e.v. de dimension n , alors toute famille de cardinal $> n$ est liée.

Donc, au maximum, une famille libre possède n éléments.

Théorème

Toute famille libre et maximale de E est une base de E (ie. toute famille libre de $\dim(E) = n$ éléments de E est une base de E).

Proposition

Si E est un s.e.v. de dimension n , alors toute famille de cardinal $< n$ n'est pas génératrice.

Donc, au minimum, une famille génératrice possède n éléments.

Théorème

Toute famille génératrice et minimale de E est une base de E (ie. toute famille génératrice de $\dim(E) = n$ éléments de E est une base de E).

Définition : Rang

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire de E dans F . On appelle *rang* de f la dimension du s.e.v. $Im(f)$. On note : $rg(f) = dim(Im(f))$.

Théorème du rang

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors

$$rg(f) + dim(Ker(f)) = dim(E)$$

Notez bien que E est l'espace vectoriel de départ ($dim(E)$).