Exercices sur les suites numériques
Indice, 1ere S

Exercice 1 : Savoir faire 11 page 121, Indice 1ere S

1. Les populations initiales des centre-ville et banlieue étant toutes deux égales à 50 000, nous avons $b_0 = c_0 = 50\ 000$.
   Puisque la population de la banlieue augmente de 4% par an, nous avons $b_1 = b_0 + \frac{4}{100}b_0 = 1,04b_0 = 52000$.
   Puisque la population du centre-ville diminue de 5% par an, nous avons $c_1 = c_0 - \frac{5}{100}c_0 = 0.95c_0 = 47\ 500$.
   En 2017, ces populations seront de $b_2 = 1.04b_1 = 54\ 080$ et $c_2 = 0.95b_1 = 45\ 125$.
2. Nous avons donc, d'après l'énoncé, la relation, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = 1.04b_n$. Nous reconnaissons alors une suite géométrique de raison $q_b = 1.04$. Nous en déduisons alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1.04^n b_0$.
3. De la même façon, nous avons pour tout entier naturel n la relation $c_{n+1} = 0.95c_n$. Aussi, (c_n) est-elle une suite géométrique de raison $q_c = 0.95$ et de premier terme $c_0 = 50\ 000$ donc pour tout entier naturel n, nous avons $c_n = 0.95^n c_0$.

Exercice 2: Une démonstration du cours (exercice 125 page 137, Indice 1ere S)

1. (u_n) étant une suite arithmérique de premier terme u_0 et de raison r, nous avons, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + n \times r$.
2. Nous avons donc:

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\ &= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \ldots + (u_0 + nr) \\ &= (n+1)u_0 + r(1 + 2 + \ldots + n) \end{aligned}$$

3. Nous savons que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ d'où

$$S_n = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} = (n+1)\frac{2u_0 + nr}{2}$$

Somme des n premiers entiers
$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$
$S = n + (n-1) + \ldots + 1$.
En faisant la somme termes à termes, nous obtenons que $2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}_{n\ fois}$ d'où $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

4. Comme $2u_n + nr = u_0 + u_n$, nous en déduisons que $S_n = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$.

Exercice 3: La médiathèque (exercice 127 page 137, Indice 1ereS)

1. (a) D'après les données de l'énoncé, nous avons que $a_1 = \frac{80}{100}a_0 + 400 = 2400$ et $a_2 = \frac{80}{100}a_2 + 400 = 2320$.
   (b) On en déduit alors la formule de récurrence suivante: pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0.8a_n + 400$.
2. (a) Posons donc, pour tout entier naturel n, $v_n = a_n - 2000$. Nous avons

$$v_{n+1} = a_{n+1} - 2000 = 0.8a_n + 400 - 2000 = 0.8a_n - 1600$$

   Or, $a_n = v_n + 2000$ d'où $v_{n+1} = 0.8(v_n + 2000) - 1600 = 0.8v_n + 0.8 \times 2000 - 1600 = 0.8v_n$. On en déduit alors que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0.8$ et de premier terme $v_0 = a_0 - 2000 = 500$.
   (b) Nous obtenons donc que, pour tout entier naturel n, $v_n = 500 \times 0.8^n$ d'où $a_n = v_n + 2000 = 500 \times 0.8^n + 2000$.
   (c) D'après le critère de convergence des suites géométrique, puisque $q = 0.8 \in]-1;1[$, nous en déduisons que la suite (0.8^n) converge vers 0. Aussi, par le théorème d'opérations algébriques sur les suites convergentes, nous en déduisons que la suite (a_n) converge vers 2000.

La suite géométrique (q^n)
- converge vers 0 si $-1 < q < 1$
- est constante (donc convergente) si $q = 1$
- diverge vers $+\infty$ si $q > 1$
- est divergente si $q < -1$.

(d) Aussi, le nombre d'adhérents de la médiatèque tend vers 2000 personnes.

Exercice 4: Somme de carrés (Exercoce 128 page 137, Indice TS)

1. Nous avons $U_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = U_n + (n+1)^2$.
2. Nous avons $W_1 = \frac{1\times 2\times 3}{6} = 1$ et

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)}{6}\left((n+2)(2n+3) - (n(2n+1))\right) = \frac{(n+1)}{6}\left(2n^2+7n+6-2n^2-n\right) \\ &= \frac{(n+1)}{6}(6n+6) = (n+1)^2 \end{aligned}$$

3. Les suites (U_n) et (W_n) sont deux suites linéaires récurrentes d'ordre 1 et ayant même premier terme et vérifiant la même relation de récurrence: aussi, ces deux suites sont-elles égales. On en déduit alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = (n+1)^2$.

Puisque le raisonnement par récurrence n'est vu qu'en Terminale S, il n'est pas possible à ce niveau (1ereS) de démontrer directement que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^2$. Aussi, l'exercice propose de démontrer que les deux suites sont égales en montrant qu'elles ont même premier terme et même relation de récurrence d'ordre 1.

Exercice 5: Problème de synthèse (exercice 131 page 138, Indice 1ere S)

1. Le triangle OA_0A_1 étant rectangle en A_1, nous avons d'après le théorème de Pythagore que $A_0A_1^2+OA_1^2=OA_0^2$. Comme ce triangle est isocèle en A_1, on en déduit aussi que $A_0A_1=OA_0$ d'où $2OA_1^2=OA_0^2=1$. Il s'ensuit alors que $OA_1^2=\frac{1}{2}$ d'où $OA_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Comme OA_1 est une longueur (donc toujours positive), on a alors $OA_1=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Le triangle OA_nA_{n+1} étant rectangle en A_{n+1}, d'après le théorème de Pythagore, nous en déduisons que $OA_{n+1}^2+A_nA_{n+1}^2=OA_n^2$. Comme ce triangle est aussi isocèle en A_{n+1}, il s'ensuit que $OA_n=A_nA_{n+1}$ et donc nous ontenons la relation $2OA_{n+1}^2=OA_n^2$, soit $OA_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}OA_n$.

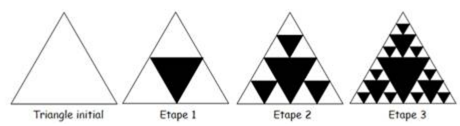
3. Posons donc $u_n=OA_n$. D'après la question précédente, nous avons $u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}u_n$. Aussi, (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=1$ et de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. On a alors la formule, pour tout entier naturel n, $u_n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

4. Nous avons $L_n=OA_0+A_0A_1+A_1A_2+\ldots+A_{n-1}A_n$. Or, pour tout $k\in\mathbb{N}$, nous avons $OA_k=A_{k-1}A_k$ d'où $L_n=OA_0+OA_1+OA_2+\ldots+OA_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$. On reconnaît alors la somme des premiers termes d'une suite géométrique, d'où $L_n=\frac{1-(\sqrt{2}/2)^{n+1}}{1-\sqrt{2}/2}$.

5. Comme $0\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}<1$, d'après le théorème des suites géométriques, nous savons que la suite de terme général $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ converge vers 0. On déduit alors du théorème d'opérations algébriques sur les suites convergentes que la suite (L_n) converge vers $\frac{1}{1-\sqrt{2}/2}=\frac{2}{2-\sqrt{2}}\times\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{2(2+\sqrt{2})}{4-2}=2+\sqrt{2}$.

Exercice 6: Prise d'initiative (exercice 135 page 139, Indice 1ereS)

Désignons par N_k le nombre de triangles noircis à l'étape k et B_k le nombre de triangles blancs à l'étape k. Nous avons donc $B_0=1$ et $N_0=0$.
A chaque étape, chaque triangle blanc donne naissance à 4 triangles: trois blancs et un noirci. Aussi, nous en déduisons les relations de récurrences suivantes:



$$B_{n+1}=3B_n;\qquad N_{n+1}=N_n+B_n$$

Nous déduisons aisément que (B_n) est une suite géométrique de premier terme $B_0=1$ et de raison 3, donc $B_n=3^n$. Concernant (N_n), nous savons que $\forall k$, $N_{k+1}=N_k+3^k$. Ecrivons ces relations pour k variant de 1 à n: nous obtenons:
$N_{n+1}=N_n+3^n$
$N_n=N_{n-1}+3^{n-1}$
$N_{n-2}=N_{n-2}+3^{n-2}$
$\vdots$
$N_1=N_0+3^0$
En sommant ces relations, nous obtenons (par télescopage)

$$N_{n+1}=N_0+3^0+3^1+3^2+\ldots+3^n=N_0+\frac{1-3^n}{1-3}=\frac{3^n-1}{2}$$

Exercice 7: Le tapis de Sierpinski (exo 126 page 137, Indice 1erS)

1. Lors du passage de l'étape n à l'étape $n+1$, chaque carré blanc de la figure à l'étape n est divisé en 9 carrés: l'un deux sera noirci. Aussi, à chaque changement d'étape, $\frac{1}{9}$ de la surface non colorié sera noirci. Il s'ensuit donc que
$$A_{n+1}=A_n+\frac{1}{9}(1-A_n)=\frac{8}{9}A_n+\frac{1}{9}$$

2. Posons donc $B_n=1-A_n$. Ainsi,
$$B_{n+1}=1-A_{n+1}=1-\left(\frac{8}{9}A_n+\frac{1}{9}\right)=\frac{8}{9}-\frac{8}{9}A_n=\frac{8}{9}(1-A_n)=\frac{8}{9}B_n$$

Il s'ensuit donc que (B_n) est une suite géométrique de premier terme $B_1 = \frac{8}{9}$ et de raison $\frac{8}{9}$. Aussi, d'après le cours, nous savons que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$B_n = \frac{8}{9} \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} = \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

3. On déduit donc que $A_n = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$.
4. D'après le critère des suites géométriques, puisque $0 < \frac{8}{9} < 1$, la suite (B_n) tends vers 0 d'où la suite (A_n) tends vers 1.