

Méthode des isopérimètres

Indice TS, TP 2 page 33

1. Il faut donc montrer que $A_1B_1 = \frac{1}{2}A_0B_0$ (puisque le nombre de côtés du polygone double à chaque fois).
 Considérons le triangle $A_0B_0I_0$. Nous savons que A_1 est le milieu de $[A_0I_0]$ et que B_1 est le milieu de $[B_0I_0]$. Aussi, d'après le théorème de la droite des milieux, nous savons que $(A_1B_1) \parallel (A_0B_0)$ et $A_1B_1 = \frac{1}{2}A_0B_0$. Aussi, ces deux polygones ont bien même périmètre. Par itération des constructions, on en déduit que tous les polygones construits ont même périmètre.
- 2.
3. On peut conjecturer que la suite (h_n) est une suite croissante et que (r_n) est, elle décroissante. De l'inégalité $h_n < r_n$ on a déduit que ses deux suites sont convergentes et on peut conjecturer que leur limite est commune.

Partie B: Détermination de relations de récurrence

1. Le premier polygone étant un carré de périmètre 2, il s'ensuit que ses côtés sont de longueur $1/4$, et que $OA_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (par Pythagore).
2. (a) En utilisant le théorème de la droite des milieux dans le triangle IAB , comme C est le milieu de $[IA]$ et D celui de $[IB]$, on en déduit que $CD = \frac{1}{2}AB$.
 (b) Nous allons montrer que le quadrilatère $IDJC$ est un losange. Pour ce faire, considérons le triangle AIB . Nous savons que C est le milieu de $[IA]$ et J celui de $[AB]$, donc nous déduisons du théorème de la droite des milieux que $(CJ) \parallel (IB)$ et que $CJ = \frac{1}{2}IB = ID$.
 De même, toujours dans ce triangle IAB , nous avons D milieu de $[AB]$ et J milieu de $[IA]$, d'où nous déduisons que $(DJ) \parallel (IA)$ et $DJ = \frac{1}{2}IA = IC$. Aussi, nous savons que le quadrilatère $IDJC$ a ses quatre côtés deux à deux parallèles donc c'est un parallélogramme. Comme de plus le triangle IAB est isocèle en I , nous en déduisons que $IA = IB$ et donc, grace aux égalités de longueurs précédentes, on en déduit que les côtés du parallélogramme $IDJC$ sont égaux, d'où c'est un losange. Aussi, ses diagonales sont-elles perpendiculaires et se coupent en leur milieu. Aussi, le milieu de $[IJ]$ et de $[CD]$ est-il le point K . On a donc bien K milieu de $[IJ]$.
 (c) D'après la construction précédente, nous savons que C est un sommet du polygone P_{n+1} et donc $r_{n+1} = OC$. Comme $[CD]$ est un côté de P_{n+1} , il s'ensuit que le cercle inscrit à P_{n+1} passe par K le milieu de $[CD]$. On a ainsi $r_{n+1} = OK$.
3. Les points O, I, J et K étant alignés, puisque K est le milieu de IJ nous avons $IJ = IK + KJ$. Aussi, $OI + OJ = 2OJ + JK + KI = 2OJ + 2JK = 2OK$.
 Nous avons donc $h_{n+1} = \frac{1}{2}(r_n + h_n)$.
4. Remarquons que les droites (OC) et (AI) sont perpendiculaires (puisque $[OC]$ est un rayon du cercle inscrit au polygone dont un côté est $[AI]$). Il s'ensuit alors par définition du carré scalaire que:

$$\overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC}) = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OI} + \underbrace{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{IC}}_{=0}$$

On a donc $\overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OI}$. Comme K est le projeté orthogonal de C sur (OI) , il s'ensuit que $\overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OI}$.

On peut aussi utiliser la relation de Chales, avec $\overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OI} = (\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KC}) \cdot \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{OI}$. Or, comme $[CD]$ est une corde du cercle de centre O passant par C , on en déduit que O appartient à sa médiatrice; aussi, (OK) est perpendiculaire à (CD) et donc les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{OI}$ sont orthogonaux.

En calculant chacun de ces produits scalaires séparément, nous obtenons l'égalité $r_{n+1}^2 = r_n \times h_n$.

Partie C: Encadrement de π

1. En comparant donc les périmètres des cercles inscrits, circonscrit et du polygone lui-même, nous obtenons l'encadrement:

$$2\pi h_n < 2 < 2\pi r_n$$

Nous obtenons alors $\frac{1}{r_n} < \pi < \frac{1}{h_n}$.

2. Compléter l'algorithme suivant:

```

Saisir p
n prend la valeur 0
h prend la valeur 1/4
r prend la valeur  $\sqrt{2}/4$ 

Tant que  $\frac{1}{h} - \frac{1}{r} > p$ 
    n prend la valeur n + 1
    h prend la valeur  $1/2(h + r)$ 
    r prend la valeur  $r(2h - r)$ 
Fin Tant que

Afficher  $\frac{1}{r}$ ,  $\frac{1}{h}$  et n.

```

Partie D: d'après Capes 1991

1. Raisonnons par récurrence sur l'entier naturel n pour démontrer la propriété $\mathcal{P}(n)$: $0 < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$.

• *Initialisation*: Au rang $n = 0$, nous avons déjà $0 < u_0 = a < v_0 = b$. De $u_1 = \frac{a+b}{2} > \frac{a+a}{2} = a_0$ nous déduisons que $b > u_1 > u_0$. De même, de $v_1 = \sqrt{u_1 \times v_0}$ nous déduisons que $v_1 < v_0 = b$.

Reste alors à comparer u_1 et v_1 .

$$v_1 - u_1 = \sqrt{u_1 v_0} - u_1 = \sqrt{u_1} (\sqrt{v_0} - \sqrt{u_1}) = \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0} + \sqrt{u_1}} (v_0 - u_1) = \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0} + \sqrt{u_1}} \left(\frac{v_0 - u_0}{2} \right) > 0$$

Il s'ensuit alors que $v_1 > u_1$ et nous avons donc $0 < u_0 < u_1 < v_1 < v_0 < b$. Aussi, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est-elle vraie.

Hérédité Supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \geq 0$ et démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons déjà $u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} > u_{n+1} > 0$ et $v_{n+2} = \sqrt{\frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} v_{n+1}} < \sqrt{v_{n+1}^2} = v_{n+1}$.

Il reste donc à comparer v_{n+2} et u_{n+2} .

$$\begin{aligned}
 v_{n+2} - u_{n+2} &= \sqrt{u_{n+2}} (\sqrt{v_{n+1}} - \sqrt{u_{n+2}}) = \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{u_{n+2}}} (v_{n+1} - u_{n+2}) \\
 &= \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{u_{n+2}}} \left(v_{n+1} - \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{v_{n+1} - u_{n+1}}{2} \right) > 0
 \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que $v_{n+2} > u_{n+2}$, d'où $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < v_{n+2} < v_{n+1}$. Aussi, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est-elle vraie.

• *Conclusion*: On en déduit finalement que $\forall n \geq 0, 0 < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$.

2. Nous avons d'après les inégalités de la question précédente, $0 < v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}}} \left(\frac{v_n - u_n}{2} \right) < \frac{v_n - u_n}{2}$.

Nous en déduisons alors, par itération, que $0 < v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$. En déduit alors du théorème des gendarmes que $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

3. Des questions précédentes, nous déduisons que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante et que la suite $(v_n - u_n)$ est de limite nulle. Aussi, les suites (u_n) et (v_n) sont-elles adjacentes: elles sont donc convergentes et ont même limite. Soit alors ℓ leur limite commune.
4. La fonction $x \mapsto \cos(x)$ étant strictement décroissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, elle réalise une bijection de $]0; \frac{\pi}{2}[$ sur $]0; 1[$. Aussi, puisque $0 < a < b$, nous avons $0 < \frac{a}{b} < 1$, d'où il existe un unique $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $\frac{a}{b} = \cos \theta$.

5. Nous avons alors $v_0 = b$ et $u_0 = a = b \cos(\theta)$.

De même, $u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{b(1 + \cos \theta)}{2} = b \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $v_1 = \sqrt{u_1 v_0} = b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

6. Raisonnons par récurrence sur $n \geq 1$ pour démontrer ces formules.

Initialisation: La question précédente montre que la formule est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité Supposons donc ces formules vraies au rang n et démontrons-les au rang $n + 1$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} = b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \frac{1 + \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{2}$$

Or, comme $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$ nous obtenons que $\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\cos(a)+1}{2}$. En utilisant cette formule, nous obtenons que $u_{n+1} = b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$ ce qui correspond bien à la formule recherchée.

Par ailleurs, $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} = b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$. Nous en déduisons alors que les deux formules sont vraies au rang $n + 1$.

Conclusion: Il s'ensuit que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, nous avons les expressions

$$u_n = b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right); \quad v_n = b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

7. De la formule $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$, par itération, nous déduisons la formule $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$.

Formellement, il faut faire une récurrence ...

8. En remplaçant dans la formule donnant l'expression de v_n , nous obtenons $v_n = \frac{b \sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$.
9. Comme $\sin(0) = 0$, dans $\frac{\sin(x)}{x}$ nous reconnaissons le taux d'accroissement de la fonction $\sin$ en 0. Comme $\sin' = \cos$, nous avons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \cos(0) = 1$.
10. Quand $n \rightarrow +\infty$, $\frac{\theta}{2^n} \rightarrow 0$. Aussi, de la question précédente, nous déduisons que $\frac{\sin \theta / 2^n}{\theta / 2^n} \rightarrow 1$. Il s'ensuit alors que $v_n \rightarrow \frac{b \sin(\theta)}{\theta}$ quand $n \rightarrow +\infty$. Nous avons donc bien $\ell = \frac{b \sin(\theta)}{\theta}$.
11. **Application: Problème sur les méthodes isopérimétriques, TS** Nous avons $a = h_0 = 1/4$ et $b = r_0 = \sqrt{2}/4$ d'où $\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\theta = \frac{\pi}{4}$. Il s'ensuit alors que la limite commune des suites (h_n) et (r_n) est $\frac{b \sin(\pi/4)}{\pi/4} = \frac{1}{\pi}$. Aussi, la conjecture réalisée dans l'exercice de TS. est bien démontrée.