

L'histoire de π : L'antiquité

Solution

Partie I: Papyrus du Rhind

1. Soit D le diamètre du cercle. Nous savons que l'aire du cercle est πR^2 où R est le rayon du cercle, soit $R = \frac{D}{2}$ et donc l'aire du cercle est $\frac{\pi D^2}{4}$. Ahmès propose d'approximer cette aire par celle du carré dont le côté est $D - \frac{1}{9}D = \frac{8}{9}D$. Aussi, propose-t-il d'approximer $\pi \frac{D^2}{4}$ par $(\frac{8}{9}D)^2$. Cela donne alors $(\frac{16}{9})^2$ comme approximation de π . L'erreur commise est alors inférieure à 2×10^{-2} .
2. Partons que $\sqrt{\frac{\pi}{4}} = 0,886\dots$. Aussi, puisque $0 \leq \frac{1}{b} \leq 1$ nous en déduisons que $-0.21 \leq a \leq 1.8$. Comme a est un entier naturel, il s'ensuit que $a \in \{0, 1\}$. Si $a = 0$, alors la meilleure approximation est obtenue pour $b = 1$. Si $a = 1$, alors $b < 0$ et $\frac{1}{b} = 1 - \sqrt{\frac{\pi}{6}}$ d'où $b = \frac{2}{2 - \sqrt{\pi}} = 8.789$. Aussi, $b = 8$ ou 9 . En comparant ces fractions à la valeur de $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ nous en déduisons que la meilleure approximation rationnelle est $\frac{8}{9}$ ce qui donne comme approximation pour π la valeur $(\frac{16}{9})^2$.

Partie II: Méthode d'Archimède

A. Géométrie dans le polygone régulier.

1. On se place donc dans le plan euclidien. Soit ABC un triangle quelconque (non plat) et soit I le milieu de $[BC]$. Nous avons alors:

$$AB^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = (\vec{AI} + \vec{IB}) \cdot (\vec{AI} + \vec{IB}).$$

En développant ce produit nous obtenons alors: $AB^2 = AI^2 + 2\vec{AI} \cdot \vec{IB} + \vec{IB}^2$.

On procède alors de même avec $AC^2 = \vec{AC} \cdot \vec{AC} = (\vec{AI} + \vec{IC}) \cdot (\vec{AI} + \vec{IC})$ pour obtenir: $AC^2 = AI^2 + 2\vec{AI} \cdot \vec{IC} + IC^2$. En sommant ces deux expressions, nous obtenons:

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2\vec{AI} \cdot (\vec{IB} + \vec{IC}) + IB^2 + IC^2.$$

Comme I est le milieu de $[BC]$ nous obtenons alors $\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$ et $IB = IC = \frac{1}{2}BC$. Il s'ensuit alors que:

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2.$$

2. Soit k un entier naturel vérifiant $k \geq 3$.
 - (a) Nous avons évidemment $R_k = OA = OB = OC$. Le cercle inscrit dans ce polygone régulier est de même centre que le cercle circonscrit, soit O . De plus, le côté $[AB]$ du polygone doit être tangent à ce cercle, ce qui implique que le cercle inscrit est tangent en $T \in [AB]$ tel que (OT) est perpendiculaire à $[AB]$. Or, le triangle OAB est isocèle en O , d'où la hauteur est aussi médiane: on en déduit alors que $T = H$ et donc $r_k = OH$.
 - (b) Le triangle CAB est isocèle en C (car (OC) est la médiatrice de $[AB]$). Il s'ensuit alors que $AC = CB$ et que l'angle géométrique AOC est égale à la moitié de l'angle AOB . Or, $AOB = \frac{2\pi}{k}$ d'où $AOC = \frac{\pi}{k}$: c'est donc bien le côté d'un polygone régulier convexe à $2k$ côtés (et dont (C) est le cercle circonscrit). Le périmètre de ce polygone serait alors $2kAC$.
 - (c) Considérons l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{2}{2kAC} = \frac{1}{kAC}$. Puisqu'une homothétie multiplie les longueurs par son rapport, nous déduisons que l'image par cette homothétie du polygone à $2k$ côtés sera un polygone régulier (car une homothétie conserve les angles) de périmètre 2.
Rappelons que r_{2k} représente le rayon du cercle inscrit au polygone que nous venons d'obtenir (i.e. un polygone régulier convexe à $2k$ côtés ayant 2 pour périmètre). Dans le dessin initial, le cercle inscrit au polygone à $2k$ côtés (et donc $[AC]$ est l'un d'eux) est le cercle de centre O et de rayon OA' (on utilise le fait que AOC est un triangle isocèle en O ; aussi $(A'O)$ est perpendiculaire à (AC)). On obtient donc r_{2k} en multipliant OA' par le rapport de l'homothétie précédente, d'où $r_{2k} = \frac{OA'}{k \times AC}$. D'autre part, nous savons que le polygone convexe régulier à k côtés (dont $[AB]$ est l'un d'eux) est de périmètre 2. Or, ce périmètre est aussi $k \times AB$ d'où nous déduisons que $k = \frac{2}{AB}$. Comme H est le milieu de $[AB]$ il s'ensuit que $k = \frac{1}{AH}$ et donc en reportant dans la précédente formule on a: $r_{2k} = \frac{OA' \times AH}{AC}$.

- (d) Plaçons-nous dans le triangle rectangle AHC (rectangle en H). Par le théorème de Pythagore, nous avons: $AC^2 = AH^2 + HC^2$. Or, nous constatons que $HC = OC - OH = R_k - r_k$ d'où $HC^2 = (R_k - r_k)^2$. D'autre part, le triangle AHO étant rectangle en H nous avons par Pythagore: $AH^2 + HO^2 = AO^2$ ce qui implique que $AH^2 = OA^2 - HO^2 = R_k^2 - r_k^2$. En reportant ces deux formules dans l'expression de AC^2 nous obtenons:

$$AC^2 = R_k^2 - r_k^2 + (R_k - r_k)^2 = 2R_k - 2R_k r_k \quad \text{donc} \quad AC = \sqrt{2R_k} \times \sqrt{R_k - r_k}.$$

Utilisons à présent la seconde formule de la médiane (cf. question 1.). A' étant le milieu du segment $[AC]$ nous avons:

$$OA^2 + OC^2 = 2OA'^2 + \frac{1}{2}AC^2.$$

Soit encore $2R_k^2 = 2OA'^2 + \frac{1}{2}(2R_k(R_k - r_k)) = 2OA'^2 + R_k^2 - R_k r_k$. Il s'ensuit alors que $OA' = \sqrt{\frac{R_k^2 + R_k r_k}{2}}$.

$$(e) \quad r_{2k} = \frac{AH \times OA'}{AC} = \frac{\sqrt{R_k^2 - r_k^2}}{\sqrt{2R_k} \sqrt{R_k - r_k}} \times \sqrt{\frac{R_k^2 + R_k r_k}{2}} = \frac{1}{2}(R_k + r_k).$$

- (f) En appliquant toujours l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{kAC}$, nous déduisons que $R_{2k} = \frac{R_k}{kAC} = R_k \frac{AH}{AC} = R_k \frac{R_k^2 - r_k^2}{\sqrt{2R_k^2 - 2R_k r_k}} = \sqrt{R_k} \sqrt{\frac{R_k + r_k}{2}}$ soit en passant au carré cette relation nous obtenons $R_{2k}^2 = R_k r_{2k}$.

3. (a) L'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{R_k}$ transforme le cercle $\mathcal{C}$ de la figure en le cercle unité et il transforme aussi le polygone régulier convexe à k côtés en un polygone régulier convexe à k côtés dont le cercle circonscrit est le cercle unité. Aussi, le demi-périmètre du polygone précédent (qui était 1) est transformé en $\ell_k = \frac{1}{R_k}$. De même en considérant l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{r_k}$ on transforme le cercle circonscrit au polygone de la figure en le cercle unité: le demi-périmètre du polygone est alors transformé en $L_k = \frac{1}{r_k}$.
- (b) Nous avons bien sûr: $\frac{1}{L_{2k}} = r_{2k} = \frac{1}{2}(r_k + R_k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{L_k} + \frac{1}{\ell_k}\right)$. D'autre part nous avons: $\frac{1}{\ell_{2k}^2} = R_{2k}^2 = r_{2k} R_k = \frac{1}{L_{2k}} \times \frac{1}{\ell_k}$ ce qui donne $\ell_{2k} = \sqrt{L_{2k} \ell_k}$.
- (c) L'angle au centre est $(HOA) = \frac{2\pi}{2k} = \frac{\pi}{k}$. Il s'ensuit alors que $\ell_k = \frac{1}{R_k} = \frac{1}{AO} = \frac{1}{2}k \frac{AB}{AO}$ car $AB = \frac{2}{k}$. Aussi $\ell_k = k \frac{AH}{AO} = k \sin(\frac{\pi}{k})$. De même nous avons $L_k = \frac{1}{r_k} = \frac{kAB}{2OH} = k \frac{AH}{OH} = k \tan(\frac{\pi}{k})$.

B. Etude de suites auxiliaires

A partir de ce paragraphe, les candidats utiliseront librement leurs connaissances du programme de licence.

1. Si $a_0 = b_0$ alors les deux suites sont constantes. On suppose donc que $a_0 < b_0$.

2. Démontrons par récurrence sur n que $a_n \leq b_n$.

Cette inégalité est vraie au rang $n = 0$ puisque $a_0 < b_0$ par hypothèse.

Supposons donc que, pour un entier naturel n on ait $a_n < b_n$. Alors $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ implique que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_n$. De même $a_{n+1} \leq b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \leq b_n$ ce qui nous permet de déduire que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Comme cette inégalité est vraie à tous les rangs n nous en déduisons que la suite (a_n) est croissante alors que la suite (b_n) décroît. De part l'inégalité $a_n \leq b_n$ vraie à tous les rangs, nous déduisons que (a_n) est une suite croissante et majorée donc convergente (et de même (b_n) est décroissante et minorée, donc convergente). Enfin, désignons par ℓ_a et ℓ_b respectivement les limites des suites (a_n) et (b_n) . De la relation $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, en passant à la limite nous déduisons que $\ell_a = \frac{1}{2}(\ell_a + \ell_b)$ d'où nous tirons $\ell_a = \ell_b$. Les deux suites sont alors bien adjacentes.

3. (a) Calculons donc $\sqrt{\frac{1+\gamma_n}{2}}$. On a: $\sqrt{\frac{b_n + a_n}{2b_n}} = \sqrt{\frac{a_{n+1}}{b_n}} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \gamma_{n+1}$. La suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie donc bien la relation de récurrence énoncée.

De la relation de récurrence $b_{n+1} = \sqrt{b_n a_{n+1}}$ on déduit que $b_{n+1} = \sqrt{\frac{b_n a_n + b_n^2}{2}} = b_n \sqrt{\frac{a_n/b_n + 1}{2}} = \gamma_{n+1}$ d'après la précédente relation de récurrence établie.

- (b) Nous savons que $\gamma_0 = \frac{a_0}{b_0}$ (avec a_0 et b_0 deux réels strictement positifs). Or, par hypothèse on a: $a_0 < b_0$ d'où $0 < \frac{a_0}{b_0} = \gamma_0 < 1$. La fonction $\cos$ est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$: elle réalise donc une bijection de $[0; \pi/2]$ sur $[0; 1]$. Aussi en déduisons-nous par le théorème des valeurs intermédiaires (cette fonction étant évidemment croissante) qu'il existe un unique réel α tel que $\cos(\alpha) = \gamma_0$.

On a alors par la précédente formule de récurrence vérifiée par la suite (γ_n) que $\gamma_1 = \sqrt{\frac{1+\gamma_0}{2}}$. La formule de doublement de la fonction cosinus nous donne alors l'égalité $\gamma_1 = \cos(\frac{\alpha}{2})$. De même on a: $b_1 = b_0 \gamma_1$ d'où la seconde formule.

- (c) Nous allons démontrer par récurrence que $\gamma_n = \cos(\frac{\alpha}{2^n})$, $b_n = b_0 \frac{\sin(\alpha)}{2^n \sin(\alpha/2^n)}$ et $a_n = b_0 \frac{\sin(\alpha)}{2^n \operatorname{tg}(\alpha/2^n)}$. Ces formules sont vraies aux rangs 0 et 1. Supposons-les vraies au rang n fixé et démontrons-les au rang $n+1$. On a déjà par la formule de récurrence: $\gamma_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(\alpha/2^n))} = \cos(\frac{\alpha}{2^{n+1}})$. Ensuite, $b_{n+1} = b_n \gamma_{n+1} = b_0 \frac{\sin(\alpha)}{2^n \sin(\alpha/2^n)} \times \cos(\alpha/2^{n+1}) = \frac{b_0 \sin(\alpha)}{2^{n+1} \operatorname{tg}(\alpha/2^{n+1})}$. Enfin, de la formule $a_{n+1} = b_{n+1} \gamma_{n+1}$ on déduit que $a_{n+1} = b_0 \frac{\sin(\alpha)}{2^{n+1} \operatorname{tg}(\alpha/2^{n+1})}$.

- (d) On rappelle déjà que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = 1$ ce qui nous permet de déduire que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(b_0 \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right) \frac{\alpha/2^n}{\operatorname{tg}(\alpha/2^n)} = b_0 \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}.$$

Les suites (a_n) et (b_n) étant adjacentes, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b_0 \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$.

C. Utilisation de ces suites pour établir la convergence vers π .

1. On déduit que les suites (p_n) et (P_n) sont adjacentes car les suites (a_n) et (b_n) le sont (et sont strictement positives). Recherchons le réel α vérifiant $\gamma_0 = \cos(\alpha)$. On a déjà $\gamma_0 = \frac{1}{2}$ donc $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Il en résulte alors que la limite de ces deux suites est $b_0 \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{\pi}$. Aussi la limite des suites (p_n) et (P_n) est π .

2. Procédons par récurrence. Déjà au rang $n=0$ nous avons: $p_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3 \sin(\frac{\pi}{3}) = \ell_3$ et $P_0 = 3\sqrt{3} = 3 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{3}) = L_3$. Supposons à présent que ces formules sont vraies jusqu'au rang $n \geq 0$ et démontrons-les au rang $n+1$.

$\frac{1}{P_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L_{3 \times 2^n} + \frac{1}{\ell_{3 \times 2^n}}} \right) = \frac{1}{L_{3 \times 2^{n+1}}}$ d'après la formule de récurrence obtenue pour L_n . Il s'ensuit alors que $P_{n+1} = L_{3 \times 2^{n+1}}$ et donc la formule est vraie au rang $n+1$. On montre alors de même que $p_{n+1} = \sqrt{p_n P_{n+1}} = \sqrt{\ell_{3 \times 2^n} L_{3 \times 2^{n+1}}} = \ell_{3 \times 2^{n+1}}$ (par la formule 3.(b)). On a donc démontré, par le théorème de la récurrence, que pour tout entier naturel n , $p_n = \ell_{3 \times 2^n}$ et $P_n = L_{3 \times 2^n}$.

Les suites (p_n) et (P_n) sont donc des suites extraites des suites (ℓ_n) et (L_n) ; il s'ensuit alors que ces suites (convergentes) convergent vers la même limite que leurs suites extraites, à savoir π .

3. (a) Nous avons $b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = b_n a_{n+1} - a_{n+1}^2 = a_{n+1} (b_n - a_{n+1}) = \frac{a_{n+1}}{2} (b_n - a_n)$.
 (b) De l'adjacence des suites (a_n) et (b_n) on déduit que $b_{n+1} - a_{n+1} > 0$ et que $b_{n+1} + a_{n+1} > 2a_{n+1}$. Partons de l'égalité $(b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2) = (b_{n+1} - a_{n+1})(b_{n+1} + a_{n+1}) = \frac{a_{n+1}}{2} (b_n - a_n)$.
 On divise cette relation par $a_{n+1} + b_{n+1}$ (qui est strictement positif) pour obtenir:

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2} \frac{b_n - a_n}{b_{n+1} + a_{n+1}}.$$

A ce stade, nous pouvons majorer $\frac{1}{b_{n+1} + a_{n+1}}$ par $\frac{1}{2a_{n+1}}$ ce qui implique l'inégalité $0 < b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{4} (b_n - a_n)$. En réitérant cette inégalité, nous déduisons que $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{4^n} (b_0 - a_0)$.

- (c) $0 < P_n - p_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n} = \frac{b_n - a_n}{a_n b_n} \leq \frac{1}{4^n} \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{1}{a_n b_n}$. Nous pouvons minorer $a_n b_n$ par a_0^2 ce qui nous donne:
 $0 < P_n - p_n \leq \frac{3\sqrt{3}}{4^n}$.

Les suites (a_n) et (b_n) étant adjacentes et de limite $\frac{1}{\pi}$, nous avons l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < \frac{1}{\pi} < b_n$ (les suites ne sont pas constantes). Il s'ensuit donc que $0 < \pi - p_n \leq \frac{3\sqrt{3}}{4^n}$.

- (d) p_n réalise une approximation de π à 10^{-8} près lorsque $3\sqrt{3} < 4^n 10^{-8}$: cela est réalisé pour $n > 14$. On en déduit que le demi-périmètre du polygone régulier convexe à 45 côtés réalise une approximation de π à 10^{-8} près.