Petit problème 1: Projecteurs

Dans tout le problème, on désigne par E un espace vectoriel réel de dimension n. On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans lui-même.

1. **Projecteur**
   On appelle *projecteur de* E tout application linéaire idempotente de E dans lui-même, c'est-à-dire toute application linéaire $f : E \to E$ vérifiant $f \circ f = f$.

   (a) Montrer que si f est un projecteur de E, alors $Ker(f) \oplus Im(f) = E$.

   (b) On désigne par $\mathcal{B}_{Ker(f)} = \{x_1, \dots, x_k\}$ et $\mathcal{B}_{Im(f)} = \{x_{k+1}, \dots, x_n\}$ des bases respectives de $Im(f)$ et $Ker(f)$.
   Justifier que la famille $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation des familles $\mathcal{B}_{Ker(f)}$ et $\mathcal{B}_{Im(f)}$ est une base de E.
   Précisez la matrice de f dans cette base.

2. **Projection**
   Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E (ie. $E = F \oplus G$). Aussi, tout élément $x \in E$ s'écrit, de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On appelle *projection sur F parallèlement à G* l'application p dans E dans lui-même qui à x associe x_F.

   (a) Montrer que p est un projecteur, c'est-à-dire que $p \circ p = p$.

   (b) Précisez $Ker(p)$ et $Im(p)$.

3. **Avec deux projecteurs**
   Soient p et q deux projecteurs de E.

   (a) Montrer que p et q ont même noyau si et seulement si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

   (b) Enoncer une condition nécessaire eet suffisante pour que p et q aient même image.

4. **Somme de deux projecteurs**
   On considère à présent p et q deux projecteurs de E.

   (a) Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = -q \circ p$.

   (b) On suppose à présent que $p + q$ est un projecteur.
   Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$.
   En déduire que $Im(p + q) = Im(p) \oplus Im(q)$.

   (c) Montrer alors que $Ker(p + q) = Ker(p) \cap Ker(q)$.

5. **Projecteurs qui commutent**
   Soient à présent p et q deux projecteurs vérifiant $p \circ q = q \circ p$.
   Montrer que $Im(p \circ q) = Im(p) \cap Im(q)$ et que $Ker(p \circ q) = Ker(p) + Ker(q)$.

6. **Un projecteur et un endomorphisme**
   Soient p un projecteur de E et f un endomorphisme.

   (a) Montrer que $Ker(f \circ p) = Ker(p) \oplus (Ker(f) \cap Im(p))$.

   (b) Montrer que $Im(p \circ f) = Im(p) \cap (Im(f) + Ker(p))$.

7. **Avec deux projecteurs**
   Soient p et q deux projecteurs de E.

   (a) Montrer que la somme $Im(q) + (Ker(p) \cap Ker(q))$ est directe.

   (b) On suppose que $p \circ q$ est un projecteur. Montrer que si $x \in Im(p \circ q)$, alors $q(x) - x \in Ker(p) \cap Ker(q)$.
   En déduire que $Im(p) \cap (Im(q) + Ker(p)) \subset Im(q) \oplus (Ker(p) \cap Ker(q))$.

   (c) Réciproquement, montrer que si $Im(p \circ q) \subset Im(q) \oplus (Ker(p) \cap Ker(q))$ alors $p \circ q$ est un projecteur.