

Supplémentaire commun à deux sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, où $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se donne A et B deux sous-espaces vectoriels différents de E et on se demande à quelle(s) condition(s) est-ce qu'il existe un sous-espace vectoriel C de E tel que $A \oplus C = B \oplus C = A + B$. Le s.e.v. C est alors un supplémentaire commun à A et B dans $A + B$.

1. Etude d'une condition nécessaire

On suppose dans cette question l'existence du sous-espace vectoriel C vérifiant $A \oplus C = B \oplus C = A + B$.

Montrer alors que $\dim(A) = \dim(B)$ et exprimer $\dim(C)$ à l'aide de $\dim(A)$ et $\dim(A \cap B)$.

Dans la suite du problème, nous considérerons que $\dim(A) = \dim(B)$. Nous allons montrer que, sous cette seule condition, le sous-espace vectoriel C existe.

2. Cas particulier des hyperplans

Dans cette question, on suppose que A et B sont deux hyperplans (différents) de E , c'est-à-dire que $\dim(A) = \dim(B) = n - 1$.

- (a) Montrer qu'il existe $u \in A$ et $v \in B$ tels que $u \notin B$ et $v \notin A$.
- (b) Posons $w = u + v$. Montrer que $w \notin A \cup B$.
- (c) Montrer que la droite vectorielle $C = \text{Vect}(w)$ est un supplémentaire commun à A et B dans $A + B$.

3. Etude du cas général

- (a) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel A' tel que $(A \cap B) \oplus A' = A$ (i.e. A' est un supplémentaire de $A \cap B$ dans A).
- (b) On admet qu'il existe de même un sous-espace vectoriel B' tel que $(A \cap B) \oplus B' = B$. Montrer que $A' \cap B' = \{0\}$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dim(A') = \dim(B') = p$.
- (c) On désigne par $\mathcal{B}_{A'} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_{B'} = (f_1, \dots, f_p)$ des bases respectives de A' et B' . Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, on pose $g_i = e_i + f_i$. Montrer que la famille $\mathcal{D} = (g_1, g_2, \dots, g_p)$ est libre.
- (d) On désigne alors par C le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{D}$: déterminer $\dim(C)$.
- (e) Montrer que $A \cap C = B \cap C = \{0\}$.
- (f) En déduire que C est un supplémentaire commun à A et B dans $A + B$.

Etude des projecteurs de E

Dans tout le problème, on désigne par E un espace vectoriel réel de dimension finie n et par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E sur lui-même. On appelle *projecteur* tout endomorphisme idempotent de E , c'est-à-dire tout endomorphisme p vérifiant $p^2 = p$. On rappelle que la trace d'un endomorphisme est égale à la trace de la matrice qui lui est associée dans une base de E ; la trace d'un endomorphisme est invariante de la base choisie, et l'application $Tr : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

1. Etude d'un projecteur

- (a) Montrer que si p est un projecteur, alors $Im(p) \oplus Ker(p) = E$.
- (b) En déduire la forme de la matrice de p dans une base adaptée à la précédente décomposition de E .
En déduire que le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

2. Somme de deux projecteurs

On considère à présent p et q deux projecteurs de E .

- (a) Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = -q \circ p$.
- (b) On suppose à présent que $p + q$ est un projecteur. Montrer que $Im(p + q) = Im(p) \oplus Im(q)$.
En déduire alors que $p \circ q = q \circ p = 0$.
- (c) Montrer alors que $Ker(p + q) = Ker(p) \cap Ker(q)$.

3. Projecteurs qui commutent

Soient à présent p et q deux projecteurs vérifiant $p \circ q = q \circ p$.

Montrer que $Im(p \circ q) = Im(p) \cap Im(q)$ et que $Ker(p \circ q) = Ker(p) + Ker(q)$.