

Borne sup. et applications

Partie 1: Généralités sur la borne supérieure

1. Soit $a_0 = \max(A)$ le plus grand élément de A . Alors, a_0 est un majorant de A puisque $\forall a \in A, a \leq a_0$. Par ailleurs, si M est un majorant de A , alors $a_0 \leq M$ puisque $a_0 \in A$. Aussi, a_0 est-il nécessairement le plus petit des majorants de A .
La réciproque est fautive: par exemple, l'ensemble $\{1 - 1/n; n \in \mathbb{N}^*\}$ admet 1 pour borne supérieure mais n'admet pas de plus grand élément.
2. Supposons que α et α' soient deux bornes supérieures de A . Alors α et α' étant des majorants de A , on en déduit que $\alpha \leq \alpha'$ (puisque α est le plus petit des majorants de A) et $\alpha' \leq \alpha$, d'où $\alpha = \alpha'$. On en déduit alors l'unicité de la borne supérieure d'un ensemble.
3. Supposons déjà que α soit une borne supérieure de A : aussi est-ce le plus petit des majorants de l'ensemble A . Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors il existe nécessairement $a \in A$ vérifiant $\alpha - \varepsilon < a \leq \alpha$: en effet sinon $\beta = \alpha - \varepsilon$ serait un majorant de A , ce qui contredit la minimalité de α (en tant que borne sup, c'est le plus petit des majorants de A). Réciproquement, supposons que α est un majorant de A vérifiant $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \alpha - \varepsilon < a \leq \alpha$. Montrons alors que α est le plus petit des majorants de A : pour ce faire, considérons $\varepsilon > 0$. Puisque par hypothèse il existe $a \in A$ tel que $\alpha - \varepsilon < a \leq \alpha$, on en déduit que $\forall \varepsilon > 0, \alpha - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A . Aussi, α est-il le plus petit des majorants de A et donc est sa borne supérieure.

On fera bien attention aux inégalités: l'une est large et l'autre est stricte! On ne peut pas les modifier...

4. Considérons $\mathcal{A} = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$. Déjà, il est aisé de voir que $2 \in \mathcal{A}$ ($2 = 1 + 1$) et que 2 est un majorant de $\mathcal{A}$ (puisque $\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \frac{1}{n} \leq 1$ et $\frac{1}{m} \leq 1$). Aussi nous en déduisons que $\sup(\mathcal{A}) = 2$.
Intéressons-nous à présent à la borne inférieure de $\mathcal{A}$. On a clairement, $0 \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, c'est-à-dire que $\mathcal{A}$ est minoré par 0.
Montrons alors que 0 est le plus grand des minorants de $\mathcal{A}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(\frac{1}{k})$ tend vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$, il existe N tel que $\forall n \geq N, \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Il s'ensuit alors que $\frac{2}{N} \in \mathcal{A}$ (on prend $n = m = N$) et $\frac{2}{N} < \varepsilon$, d'où ε n'est pas un minorant de $\mathcal{A}$. Il s'ensuit donc que 0 est le plus grand des minorants de $\mathcal{A}$ (puisque toute valeur $\varepsilon > 0$ strictement plus grande n'est plus un minorant de $\mathcal{A}$), d'où $\inf(\mathcal{A}) = 0$.

Partie 2: Borne supérieure $\mathbb{Q}$

Soit $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$. Le but de cette question est de montrer que $\mathcal{E}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un rationnel $M = \frac{p}{q}$ tel que $M = \sup(\mathcal{E})$.

1. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$: aussi, il existe deux entiers naturels p et q , premiers entre eux (on considère la fraction irréductible), tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. En élevant au carré, nous en déduisons que $\frac{p^2}{q^2} = 2$ d'où $p^2 = 2q^2$. Aussi, 2 est un diviseur de p^2 , donc un diviseur de p (puisque 2 est un nombre premier). Il s'ensuit qu'il existe p' tel que $p = 2p'$. En remplaçant, nous obtenons $(2p')^2 = 2q^2$ d'où $2p'^2 = q^2$ et donc 2 est un diviseur de q^2 , donc un diviseur de q .
Cela contredit alors le fait que p et q sont premiers entre eux, d'où $\sqrt{2}$ est un irrationnel.
2. (a) Puisque, dans cette question, $M \in \mathcal{E}$, alors $M^2 < 2$ d'où $\varepsilon = 2 - M^2 > 0$.
(b) La suite $\left(\frac{2p}{qn} + \frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. Aussi, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \frac{2p}{qN} + \frac{1}{N^2} \leq \varepsilon$.
(c) Posons donc $M' = M + \frac{1}{N}$. Clairement $M' > M$. Comparons M'^2 avec 2 pour savoir si $M \in \mathcal{E}$ ou non:

$$M'^2 = \left(\frac{p}{q} + \frac{1}{N}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} + 2\frac{p}{qN} + \frac{1}{N^2} < \underbrace{\frac{p^2}{q^2} + \varepsilon}_{=2}$$

Il s'ensuit alors que $M' \in \mathcal{E}$, ce qui contredit le fait que M soit le plus grand des majorants ($M < M'$ et $M' \in \mathcal{E}$).

Aussi, l'hypothèse $M \in \mathcal{E}$ est-elle fautive.

3. (a) On suppose que $M \notin \mathcal{E}$, donc $M^2 \geq 2$, soit $\varepsilon = M^2 - 2 \geq 0$. Néanmoins, comme M est un rationnel, $M \neq \sqrt{2}$, donc l'inégalité est stricte: on a donc $\varepsilon > 0$.
- (b) La suite $\left(\frac{2p}{qn} - \frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant convergente et de limite nulle, nous en déduisons qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2p}{qn} - \frac{1}{n^2} < \varepsilon$. On en déduit que tout $n \geq N$ vérifie la même inégalité. Enfin, en prenant N suffisamment grand, $\frac{2p}{qN} > \frac{1}{N^2}$ d'où $\forall n \geq N$, $0 < \frac{2p}{qn} - \frac{1}{n^2} < \varepsilon$.
- (c) Posons $M' = M - \frac{1}{n}$ et comparons M'^2 avec 2:

$$M'^2 = \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} - \frac{2p}{qn} + \frac{1}{n^2} \geq 2 - \varepsilon > 2$$

Il s'ensuit donc que $M'^2 \notin \mathcal{E}$, ie. c'est un majorant de $\mathcal{E}$. Or, $M > M'$ donc cela contredit le fait que M soit le plus petit des majorants de $\mathcal{E}$.

On en déduit ainsi que l'hypothèse $M \notin \mathcal{E}$ conduit à une contradiction.

4. Nous avons démontré que les 2 possibilités, soit $M \in \mathcal{E}$, soit $M \notin \mathcal{E}$ sont impossibles: aussi, l'hypothèse $M \in \mathbb{Q}$ est impossible. Aussi, l'ensemble $\mathcal{E}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.
Il faut bien comprendre cela: l'ensemble $\mathcal{E}$, en tant que sous ensemble de $\mathbb{R}$, admet une borne sup, à savoir $\sqrt{2}$, mais en tant que sous ensemble de $\mathbb{Q}$, il n'admet pas de borne supérieure.

Partie 3: Théorème des suites monotones

1. L'ensemble $\mathcal{A}$ est non vide (il contient au moins une valeur u_0) et majoré par M : aussi, puisque $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure, l'ensemble $\mathcal{A}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ celle-ci.
2. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. D'après la caractérisation de la borne supérieure vue en Partie 1, il existe N tel que $\alpha - \varepsilon < u_N \leq \alpha$. Par croissance de la suite (u_n) , nous déduisons que $\forall n \geq N$, $u_N \leq u_n$ et comme α est un majorant de (u_n) , il s'ensuit que $\forall n \geq N$, $\alpha - \varepsilon < u_n \leq \alpha$.
3. On a donc: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \geq N$, $|u_n - \alpha| \leq \varepsilon$ et donc la suite $(u_n - \alpha)$ converge vers 0, ce qui implique par le théorème d'opérations algébriques sur les suites convergentes, que la suite (u_n) converge vers α .

Partie 4: Théorème des suites adjacentes

1. Soit (w_n) une suite décroissante et de limite nulle. Pour montrer que tout les termes de (w_n) sont positifs, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe n_0 tel que $w_{n_0} < 0$. Alors par décroissance de (w_n) , $\forall n \geq n_0$, $w_n \leq w_{n_0} < 0$. Cela contredit le fait que la suite (w_n) ai pour limite 0 (on utilise $\varepsilon = -w_{n_0}$ dans la condition de convergence de (w_n) vers 0 et on obtient une absurdité).
2. Remarquons déjà que la suite (u_n) étant croissante, la suite $(-u_n)$ est décroissante. Aussi, la suite $(v_n - u_n)$ est-elle décroissante et de limite nulle. Il s'ensuit par la question précédente que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geq 0$, d'où $u_n \leq v_n$. Comme (u_n) est croissante, nous avons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq v_n$. Aussi, la suite (v_n) est-elle décroissante et minorée: elle est donc convergente: soit ℓ_v sa limite.
 De même, comme (v_n) est décroissante, nous avons $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_0$. Aussi, la suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 , donc d'après le théorème des suites monotones, elle est convergente: soit ℓ_u sa limite.
3. Nous savons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$. Or, d'après le théorème d'opérations algébriques sur les suites convergentes, nous en déduisons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \ell_v - \ell_u$. Aussi, par unicité de la limite (de la suite $(v_n - u_n)$), nous avons $\ell_v - \ell_u = 0$ soit $\ell_u = \ell_v$.
4. Montrons déjà que puisque (u_n) est croissante et de limite ℓ , $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$. Pour ce faire, considérons la suite $(\ell - u_n)$: elle est décroissante et de limite nulle par le théorème d'opérations algébriques sur les limites. Aussi, par la question 1, nous avons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ell - u_n \geq 0$ d'où $u_n \leq \ell$.
 Nous démontrons de même l'autre inégalité en considérant la suite $(v_n - \ell)$ qui est aussi décroissante et de limite nulle.

Application: $\forall n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

1. Déjà, la suite (S_n) est clairement croissant. Remarquons que $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
2. En sommant ces relations pour k variant de 1 à $n-1$, nous déduisons que

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$$

Aussi, nous déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq 2$. La suite (S_n) est donc croissante et majorée par 2, donc elle est convergente.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Partie I: Théorème des segments emboîtés

1. Les segments $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant emboîtés, nous en déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_n \geq b_{n+1}$. Aussi, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle croissante alors que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, nous savons que la longueur des segments $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$: il s'ensuit donc que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, ces deux suites sont donc convergentes et ont même limite: soit ℓ celle-ci.
2. Démontrons cette égalité (d'ensemble) par double inclusion:
 Nous savons (corollaire du théorème des suites adjacentes) que $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons l'encadrement $a_n \leq \ell \leq b_n$ donc nous en déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\ell \in I_n$. Il s'ensuit donc que $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ d'où $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n]$.
 Réciproquement, supposons que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n]$. Aussi, $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons l'encadrement $a_n \leq x \leq b_n$ et par passage à la limite, le théorème de prolongement des inégalités implique que $\ell \leq x \leq \ell$, d'où $x = \ell$. Nous avons donc bien $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n] = \{\ell\}$.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

1. Considérons I_n . En étudiant les deux cas, nous avons $I_{n+1} \subset I_n$ donc (I_n) est une suite de segments emboîtés. De plus la longueur de I_{n+1} est la moitié de celle de I_n , d'où la longueur du segment I_n est égale à $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$. On en déduit que la suite des longueurs des segments I_n tend vers 0: il s'ensuit par le théorème des segments emboîtés qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$.
2. Il nous faut définir une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) qui converge (vers ℓ). Pour ce faire, remarquons que tout intervalle I_n contient une infinité de termes de la suite (u_n) : aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un élément $u_{\varphi(n)} \in I_n$ avec $\varphi(n) > \varphi(n-1)$. Définissons ainsi $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $u_{\varphi(n)} \in I_n$ et $\varphi(n) > \varphi(n-1)$. De l'encadrement $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$ implique par théorème des gendarmes que la suite $(u_{\varphi(n)})$ est convergente et de limite ℓ .
On démontre ainsi le théorème de Bolzano-Weierstrass: toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans un compact admet une sous-suite convergente.