

L'histoire de π : La renaissance

Nous allons voir une approximation de π réalisée par François Viète (1540-1603), homme de loi et mathématicien amateur qui a consacré une partie de ses loisirs à l'astronomie, la trigonométrie et l'algèbre. C'est en 1593 qu'il donne une formule de π comme expression d'un produit infini: il s'agit possiblement du premier produit infini de l'histoire des mathématiques.

Partie 1: Approximation de π

On considère $\mathcal{P}_n$ le polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans le cercle unité, et on désigne par A_n son aire.

1. Etude des relations des aires de polygones

- (a) Précisez quel est le polygone $\mathcal{P}_2$ et calculez son aire A_2 .
- (b) Soit $n \geq 2$. Soit θ_n le demi-angle au centre du polygone régulier $\mathcal{P}_n$. Montrer que $A_n = 2^n \times \cos(\theta_n) \sin(\theta_n)$.
En déduire que $A_n = A_{n+1} \cos(\theta_n)$.

2. Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

- (a) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons $\cos^2(a) = \frac{\cos(2a)+1}{2}$.
- (b) En déduire que $\forall a \in [0; \pi/2]$, $\cos(a) = \sqrt{\frac{\cos(2a)+1}{2}}$.
- (c) En déduire que $\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\cos(\pi/8) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

3. Formule de Viète

En admettant que la suite (A_n) converge vers π , montrer la formule de Viète:

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \times \dots$$

Partie 2: Formule d'Euler

Dans cette partie, nous allons démontrer une formule d'Euler permettant de démontrer que la suite (A_n) converge vers π (sans le conjecturer par limite d'aires).

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $A_n = 2 \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2^n})} \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2^{n-1}})} \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2^{n-2}})} \dots \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , nous avons; pour $0 < \theta < \pi$

$$\frac{\sin(\theta)}{\theta} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^3}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\theta/2^n}$$

3. En reconnaissant un taux d'accroissement, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
4. En déduire que

$$\frac{\sin(\theta)}{\theta} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{4}\right) \cos\left(\frac{\theta}{8}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \dots = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

5. Démontrer alors que la suite (A_n) converge bien vers π .