

L'histoire de π : La renaissance

Partie 1: Approximation de π

1. (a) $\mathcal{P}_2$ est donc un polygone régulier ayant $2^2 = 4$ côtés inscrit dans le cercle unité de centre 0. Considérons A et B deux sommets adjacents de $\mathcal{P}_2$. Le triangle OAB étant rectangle en O , nous avons $AB = \sqrt{2}$ par le théorème de Pythagore. Il s'ensuit ensuite que $A_2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.
 (b) Soient A et B deux sommets adjacents de $\mathcal{P}_n$ et I le milieu de $[AB]$. Le triangle OAB étant isocèle en O , nous en déduisons que (OI) est la médiatrice de $[AB]$ et la bissectrice de (AOB) . Comme θ_n est le demi-angle au centre, et que le triangle IOA est rectangle, nous avons $\sin(\theta_n) = AI = \frac{AB}{2}$ et $\cos(\theta_n) = OI$. Il s'ensuit donc que l'aire du triangle OAB est $Aire_{OAB} = \frac{AB \times OI}{2} = \cos(\theta_n) \sin(\theta_n)$. Par découpage de l'aire de $\mathcal{P}_n$, nous avons $A_n = 2^n \cos(\theta_n) \sin(\theta_n)$.
 De même, nous avons bien sûr $A_{n+1} = 2^{n+1} \cos(\theta_{n+1}) \sin(\theta_{n+1})$. Or, $\theta_{n+1} = \frac{1}{2}\theta_n$. Il s'ensuit donc que $A_{n+1} = 2^{n+1} \cos(\theta_{n+1}) \sin(\theta_{n+1}) = 2^{n+1} \cos(\theta_{n+1}) \sin(\theta_{n+1})$. Or, $2 \cos(a) \sin(a) = \sin(2a)$ d'où $A_n = A_n \cos(\theta)$.
 (c) Nous savons que $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$. Or, $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ d'où $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ d'où nous déduisons la formule.
 (b) De la formule précédente, nous déduisons que $\cos(a) = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\cos(2a) + 1)}$. Si $a \in [0; \pi/2]$, alors $\cos(a) > 0$ d'où $\cos(a) = \sqrt{\frac{\cos(2a) + 1}{2}}$.
 (c) Nous savons que $\cos(\pi/2) = 0$. Aussi, $\cos(\pi/4) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos(\pi/8) = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{2} + 2}$.
 3. En utilisant la relation de récurrence **1.b**, nous savons que $A_n = A_{n+1} \cos(\theta_n)$. Aussi, en itérant cette écriture, nous obtenons que $A_2 = \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \dots \cos(\theta_n) A_{n+1}$, d'où $A_{n+1} = 2 \times \frac{1}{\cos(\theta_2)} \times \frac{1}{\cos(\theta_3)} \times \dots \times \frac{1}{\cos(\theta_n)} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \dots$

Partie 2: Formule d'Euler

1. Cette formule s'obtient immédiatement en remarquant que $A_2 = 2$ et $\forall n \geq 2, A_n = A_{n+1} \cos(\theta_n)$.
2. Nous avons par la formule de duplication du sinus que $\sin(2a) = 2 \cos(a) \sin(a)$. Aussi, démontrons la relation énoncée par récurrence sur l'entier naturel n .
 • Initialisation Au rang $n = 1$, nous avons par la formule de duplication du sinus: $\frac{1}{\theta/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2}{\theta/2} \sin(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\theta}$ d'où la formule souhaitée.
 • Hérédité Supposons la formule vraie au rang n et démontrons-la au rang $n + 1$.

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^3}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \times \underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{\theta/2^{n+1}}}_{\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\theta/2^n}} = \frac{\sin(\theta)}{\theta}$$

On reconnaît alors la formule de récurrence au rang n , ce qui nous donne immédiatement l'égalité souhaitée.

- Conclusion On a bien, pour tout entier naturel $n \geq 1$, que

$$\frac{\sin(\theta)}{\theta} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^3}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\theta/2^n}$$

3. Comme $\sin(0) = 0$, nous reconnaissons dans l'expression $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$ le taux d'accroissement de la fonction $\sin$ entre 0 et x . Cette fonction étant dérivable sur $\mathbb{R}$, nous en déduisons que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \cos(0) = 1$.
4. En passant à la limite dans la formule **II.2** nous obtenons que $\frac{\sin(\theta)}{\theta} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$.
5. En considérant $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans la précédente expression, nous obtenons que $\frac{1}{\pi/2} = \prod_{k=2}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$. En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans la formule **II.1** nous en déduisons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \pi$.