EC 222. Polynômes

Partie 2: Polynôme vs. fonction polynomiale

Jean-François Culus

17 février 2016

Plan

- Qu'est-ce qu'un polynôme / Qu'est ce qu'une fonction polynômiale ?
- Caractérisation du polynôme nul & de la fonction polynômiale nulle
- Un exemple de différence.
- Le cas où l'on peut identifier l'un à l'autre

Dans cette présentation, on désigne par $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif. On pourra penser à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, mais aussi aux corps finis $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.

Qu'est ce qu'un polynôme ?

Définition polynôme de $\mathbb{K}[X]$

A la suite $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ presque nulle de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on associe l'écriture $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$, que l'on nomme polynôme en l'indéterminée X.
On désigne par $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble de ces écritures.
Les lois $+$ et $\cdot$ de l'espace vectoriel $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}; +; \cdot)$ sur $\mathbb{K}$ munissent $(\mathbb{K}[X]; +; \cdot)$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Le produit de Cauchy des suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ permet de définir un produit interne dans $\mathbb{K}[X]$ de sorte que $(\mathbb{K}[X]; +; \times)$ est un anneau commutatif.

Caractérisation du polynôme nul

Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Qu'est ce qu'une fonction polynômiale ?

Définition : Fonction polynômiale de $\mathbb{K}$ dans lui-même

On appelle fonction polynômiale toute fonction $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ obtenue uniquement par des sommes et des produits d'éléments de $\mathbb{K}$ avec la variable.
ie. si $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est une fonction polynômiale, alors il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que
$f : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

Caractérisation de la fonction polynomiale nulle

La fonction polynomiale $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est nulle si et seulement si, pour tout élément $x \in \mathbb{K}$, $f(x) = 0$.

What's the problem ?

Considérons le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\overline{0}; \overline{1}; \overline{2}\}$.
Le polynôme $P(X) = X^3 + \overline{2}X$ n'est pas le polynôme nul.

Evaluons la fonction polynomiale $f : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$,
$f : x \mapsto x^3 + \overline{2}x$ sur tous les éléments de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:

	x^3	$\overline{2}x$	$x^3 + \overline{2}x$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

Ainsi, la fonction f est la fonction nulle.

Moralité

On peut avoir un polynôme non nul dont la fonction polynomiale associée soit la fonction nulle.

Explication

Révélation ! ! !

Si $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps fini, par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, ; 4\}$, alors le polynôme $P(X) = X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$ est non nul. Pourtant, la fonction polynomiale associée $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ le sera forcément ...

Formalisme

Soit $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes et $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{K}$ dans lui-même. On considère la fonction $\Phi : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ qui, au polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$, associe la fonction polynomiale $\Phi(P) : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par $\Phi(P) : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. On note $\Phi(P) = \widetilde{P}$.

Conclusion

Ce qui ne pose pas problème

A un polynôme P, on peut (canoniquement) associer une unique fonction polynomiale $\widetilde{P}$.

La fonction $\Phi : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ est bien définie et est surjective.

Ce qui pose problème

A une fonction polynomiale donnée, on ne peut pas nécessairement associer canoniquement **un** polynôme ...
L'application $\Phi : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ n'est pas nécessairement injective.

Ce que l'on peut faire

Lorsque $\mathbb{K}$ est un corps infini (type $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), l'application Φ est bijective : aussi, on peut identifier polynôme et fonction polynomiale lorsque le corps est infini.