

Solution: Groupes distingués

Exercice 1: Permutations

1. L'ordre du cycle est égal à sa longueur, soit ℓ .
2. Soient $c_1, \dots, c_k$ les cycles à supports disjoints tels que $\sigma = c_1 \circ c_2 \circ \dots \circ c_k$. Comme le produit de cycle à support disjoint commute, nous avons pour tout entier naturel p $\sigma^p = c_1^p \circ c_2^p \circ \dots \circ c_k^p$. Si $\sigma^p = Id$, alors pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$ $c_j^p = id$, ce qui signifie que pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, p est un multiple de ℓ_j . Aussi, p est nécessairement un multiple commun des ℓ_i . Comme l'ordre de σ est, par définition, le plus petit entier naturel non nul tel que $\sigma^p = Id$, nous en déduisons que $p = Ppcm(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k)$.
3. Nous obtenons pour la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints: $\sigma = (1\ 10\ 4\ 11\ 6) \circ (2\ 7\ 3\ 9\ 8\ 5)$. Le premier cycle c_1 est de longueur 5 et le second c_2 est de longueur 6. Aussi, la permutation σ est-elle de longueur $Ppcm(5, 6) = 30$. La signature de σ est égale au produit des signatures de c_1 et c_2 , soit $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(c_1) \times \varepsilon(c_2) = (-1)^4 \times (-1)^5 = -1$. Aussi, σ est une permutation impaire.

Exercice 2: Décomposition en produit de cycle et application

1. Nous obtenons $\sigma_1 = (1\ 7)(2\ 6)(3\ 4\ 5)$, $\sigma_2 = (2\ 4)(5\ 7\ 6\ 8)$ et $\sigma^3 = (1\ 3\ 8)(2\ 7)(4\ 9\ 6\ 5)$.
2. Avant d'effectuer ces calculs, regardons l'ordre de chaque permutation. σ_1 est d'ordre $Ppcm(2, 3) = 6$, d'où comme $100 = 6 \times 16 + 4$, nous en déduisons que $\sigma_1^{100} = (\sigma_1^6)^{16} \circ \sigma_1^4 = \sigma_1^4$. De même, la division euclidienne de 2012 par 6 donne $2012 = 337 \times 6$ d'où $\sigma_1^{2012} = id$. σ_2 est d'ordre $Ppcm(2, 4) = 4$. Comme 100 est divisible par 4, nous en déduisons que $\sigma_2^{100} = Id$. Comme 2012 est clairement un multiple de 4, nous avons aussi $\sigma_2^{2012} = id$. Enfin, σ_3 est d'ordre $Ppcm(3, 2, 4) = 12$. Comme $100 = 8 \times 12 + 4$, nous en déduisons que $\sigma_3^{100} = (\sigma_3^{12})^8 \circ \sigma_3^4 = \sigma_3^4$. La division euclidienne de 2012 par 12 donne $2012 = 12 \times 167 + 8$ d'où $\sigma_3^{2012} = \sigma_3^8$.

Exercice 3: Système de générateurs de S_n

1. Appliquons ce produit de permutation à un élément de la forme $\sigma(x_i)$. Nous avons alors $\sigma(x_1\ x_2\ \dots\ x_k)\sigma^{-1}(\sigma(x_i)) = \sigma(x_1\ x_2\ \dots\ x_k)(x_i) = \sigma(x_{i+1})$. A présent, si $y \notin \{\sigma(x_1), \sigma(x_2), \dots, \sigma(x_k)\}$, alors $\sigma^{-1}(y) \notin \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ et donc $\sigma(x_1\ x_2\ \dots\ x_k)\sigma^{-1}(y) = y$: aussi, y n'est pas dans le support de la permutation $\sigma(x_1\ x_2\ \dots\ x_k)\sigma^{-1}$. Il s'ensuit alors finalement que $\sigma(x_1\ x_2\ \dots\ x_k)\sigma^{-1} = (\sigma(x_1)\ \sigma(x_2)\ \dots\ \sigma(x_k))$.
2. Nous savons que S_n est engendrée par les transpositions: aussi, essayons d'écrire toute transposition $(i\ j)$, avec $i \neq j$, comme produit de ces transpositions. Nous avons par la question précédente $(i\ j) = (i\ 1)(j\ 1)(i\ 1)$ d'où le fait que S_n soit engendré par les transpositions $\{(1, i); i \in \{2, \dots, n\}\}$.
3. Nous savons que S_n est engendrée par les transpositions: aussi, essayons d'écrire la transposition $(i\ j)$ avec $i < j$ comme produit de ces transpositions. Déjà si $i = j - 1$, alors $(i\ j) = (j - 1\ j)$ est donc l'une de ces transpositions. Sinon, $i < j - 1$ et donc par la question précédente, nous avons que $(i\ j) = (j - 1\ j)(i\ j - 1)(j - 1\ j)$. Aussi, si $(i\ j - 1)$ s'écrit comme produit de ces transpositions, alors $(i\ j)$ s'écrit aussi comme un tel produit. En remontant de proche en proche, nous obtenons que $(i\ j)$ est produit de ces transpositions si et seulement si $(i\ i + 1)$ l'est, ce qui est vrai, d'où la conclusion.
4. Soient $\tau = (1\ 2)$ et $c = (2\ 3\ \dots\ n)$. Nous avons alors $c \circ \tau \circ c^{-1} = (1\ 3)$. Par suite, nous constatons que $c^2 \circ \tau \circ c^{-2} = (1\ 4)$. En itérant, nous obtenons que $c^k \circ \tau \circ c^{-k} = (1, k + 2)$. Aussi en déduisons-nous que la famille (τ, c) engendre la famille de la question 2 qui était génératrice, d'où (c, τ) est une famille génératrice de S_n .

Exercice 4: Un sous-groupe de $S(E)$

1. Nous avons $\text{Card}(S(E)) = n!$.
2. Pour avoir une telle permutation, il faut connaître les images des $n - k$ éléments de E parmi eux-même, c'est-à-dire qu'il y a autant de permutation de E laissant fixe tous les éléments de F qu'il y a de permutation de $E \setminus F$: il y en a donc $(n - k)!$.
3. Il est clair que l'identité de E est une permutation fixant tous les éléments de F . Si $\sigma \in S(E)$ laisse fixe tous les éléments de F , alors σ^{-1} aussi. Enfin, si σ_1 et σ_2 sont des permutations de E laissant fixe les éléments de F , alors $\sigma_1 \circ \sigma_2$ aussi. Il s'ensuit donc que l'ensemble de ces permutations forme un sous-groupe de $S(E)$.
4. Le nombre de permutations laissant F globalement invariant est $k! \cdot (n - k)!$. En effet, ces permutations sont la composée d'une permutation de E laissant F invariant et d'une permutation de F (ces deux permutations sont à support disjoint). Aussi, y en a-t'il $k! \cdot (n - k)!$.
5. On procède comme usuellement ...

Exercice 5: Centre de S_n

1. L'élément neutre de G est un élément de centre de G , d'où $Z(G)$ non vide. Soit $g \in Z(G)$ un élément du centre de g^{-1} son inverse: nous avons donc pour tout $x \in G$, $gx = xg$. En multipliant à gauche et à droite par g^{-1} cette égalité, nous obtenons que $xg^{-1} = g^{-1}x$ d'où $g^{-1} \in Z(G)$.
2. Nous procédons en deux temps: si on applique la permutation $\sigma \circ (i j) \circ \sigma^{-1}$ sur l'élément $\sigma(i)$ alors cela donne $\sigma(j)$ et de même l'image de $\sigma(j)$ par cette permutation est $\sigma(i)$. A présent, considérons un élément x autre que $\sigma(i)$ ou $\sigma(j)$. Alors $\sigma^{-1}(x) \neq \{i, j\}$ d'où x est fixe par $\sigma \circ (i j) \circ \sigma^{-1}$.
3. Supposons $\sigma \in Z(G)$. Alors pour toute transposition $(i j)$, nous avons $\sigma \circ (i j) = (i j) \circ \sigma$, ce qui implique que $\sigma \circ (i j) \circ \sigma^{-1} = (i j)$ d'où $(\sigma(i) \sigma(j)) = (i j)$. Aussi, si $\sigma \in Z(G)$, alors σ fixe toutes les transpositions, c'est à dire que si $n \geq 3$, $\sigma = id$. Si $n = 2$, alors toutes les permutations sont dans le centre (car S_2 est commutatif).