

TD 3: Groupe des permutations S_n
Exercice 1: Permutations

1. Soit $c \in S_n$ un cycle de longueur ℓ . Quel est l'ordre de c ?
2. Soit $\sigma \in S_n$ une permutation. On note $c_1, \dots, c_k$ les cycles à supports disjoints tels que $\sigma = c_1 c_2 \dots c_k$. On note ℓ_i la longueur du cycle c_i . Quel est l'ordre de σ en fonction des ℓ_i ? De même, quelle est la signature de σ en fonction des ℓ_i ?
3. Soit $\sigma \in S_{11}$ la permutation suivante:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 7 & 9 & 11 & 2 & 1 & 3 & 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints et préciser l'ordre de σ ainsi que sa signature.

Exercice 2: Décomposition en produit de cycle et application

On considère les permutations suivantes:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer ces permutations en produit de cycles à support disjoints.
2. Calculer pour $i \in \{1, 2, 3\}$ σ_i^{100} et σ_i^{2012} .

Exercice 3: Système de générateurs de S_n

On considère, pour $n \geq 2$ quelconque, le groupe des permutations S_n .

1. Montrer que si $\sigma \in S_n$ et $(x_1 x_2 \dots x_k)$ est un cycle de S_n , alors $\sigma \circ (x_1 x_2 \dots x_k) \sigma^{-1} = (\sigma(x_1) \sigma(x_2) \dots \sigma(x_k))$.
2. Démontrer que S_n est engendré par les n transpositions $(1 2), (2 3), (3 4), \dots, (n-1 n)$.
3. En déduire que S_n est engendrée par les transpositions $(1 2), (1 3), (1 4), \dots, (1 n)$.
4. On désigne par τ la transposition $\tau = (1 2)$ et par c le cycle $c = (1 2 3 \dots n)$. Calculer c^k puis $c^k \circ \tau \circ c^{-k}$. En déduire que $\{\tau, c\}$ est un système de générateur de S_n .

Exercice 4: Un sous-groupe de $S(E)$

Soit E un ensemble à n éléments et F une partie de E à p éléments. On désigne par $S(E)$ l'ensemble des permutations de E .

1. Quel est le cardinal de $S(E)$?
2. Combien y a-t'il de permutations de E laissant fixe tous les éléments de F ?
3. Montrer que ces permutations forment un sous-groupe de E .
4. Combien y a-t'il de permutations de E laissant F globalement invariant ?
5. Montrer que ces permutations forment un sous-groupe de $S(E)$.

Exercice 5: Centre de S_n

Si $(G, \times)$ est un groupe, on appelle *centre du groupe* G l'ensemble des éléments de G commutant avec tout les éléments de G : on le note $Z(G)$. Aussi, $Z(G) = \{g \in G, \forall x \in G, xg = gx\}$.

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G, \times)$.
2. On considère à présent $\sigma \in S_n$ avec $n \geq 2$. Soient i et j deux entiers différents de $\{1, 2, \dots, n\}$. Montrer que $\sigma \circ (i j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i) \sigma(j))$.
3. En déduire que $Z(G) = \{Id_{E_n}\}$.