

## TP sur l'action d'un groupe sur un ensemble

On considère  $S_9$  le groupe symétrique d'ordre 9 et  $\mathcal{E}$  l'ensemble  $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

On peut *faire agir* naturellement  $S_9$  sur  $\mathcal{E}$  au moyen de l'application:

$$\begin{array}{ccc} S_9 \times \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{E} \\ (\sigma; k) & \mapsto & \sigma(k) \end{array}$$

Dans la suite, on désigne par  $\sigma$  la permutation  $\sigma = (1\ 2\ 3) \circ (5\ 6)$ .

### Etude du sous-groupe $G = \langle \sigma \rangle$

Précisez quels sont tous les éléments du sous-groupe  $\langle \sigma \rangle$  de  $S_9$  engendré par la permutation  $\sigma$ .

### Etude des orbites de $\mathcal{E}$ sous l'action de $G = \langle \sigma \rangle$

Pour tout élément  $k \in \mathcal{E}$ , on définit **l'orbite de  $k$  sous l'action de  $G$**  par  $\omega(k) = \{g \cdot k | g \in G\}$ .

1. Préciser les orbites des différents éléments de  $\mathcal{E}$ .
2. Que remarquez-vous ? Quelle relation pourriez-vous conjecturer entre  $Card(\mathcal{E})$  et  $\sum Card(\omega(x))$

### Etude du stabilisateur d'un élément $x \in \mathcal{E}$

Pour tout élément  $x \in \mathcal{E}$ , on appelle son stabilisateur l'ensemble  $Stab(x) = \{g \in G | g \cdot x = x\}$ .

1. Précisez quels sont les stabilisateurs des différents éléments de  $\mathcal{E}$ .
2. Vérifier que les stabilisateurs des éléments de  $\mathcal{E}$  sont des sous-groupe de  $G$ .
3. Pour chaque élément  $x \in \mathcal{E}$ , quelle relation pourriez-vous établir entre  $Card(\omega(x))$ ,  $|G|$  et  $|Stab(x)|$  ?