

Intégrales de Wallis et intégrale de Gauss (D'après Caplp 2005)

Ce problème se divise en deux paragraphes, noté **A** et **B**. On établit, en **A**, la formule de Wallis donnant pour la première fois π sous forme d'un produit infini. Dans un second temps (paragraphe **B**.) on donne une application de cette formule au calcul de l'intégrale de Gauss $J = \int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

A. Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n , on désigne par I_n l'intégrale suivante, dite intégrale de Wallis: $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Etablir, pour tout entier naturel n , la relation

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

3. Montrer que la suite de terme général $u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ est constante et calculer celle-ci.
4. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive et étudier son sens de variation.
5. Montrer que, pour tout entier naturel n , $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$ et calculer la limite de $\frac{I_{n+1}}{I_n}$.
6. Calculer alors la limite de la suite $(nI_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$.
7. Montrer que $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$ puis en déduire l'expression suivante donnant π sous forme d'un produit infini:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2p+1} \left[\frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p)}{3 \times 5 \times \cdots \times (2p-1)} \right]^2.$$

B. Application à la détermination de l'intégrale de Gauss.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$.

1. Montrer que pour tout réel $x \in] -1; +\infty[$ on a: $\ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire que pour tout nombre réel u et pour tout entier naturel n non nul $u \geq -n \Rightarrow \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leq e^u$.
3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a: $\forall t \in [0; \sqrt{n}]$,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}.$$

4. Pour tout entier naturel n on pose $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$.
On cherche à déduire de la question **B.3.** un encadrement de J_n à l'aide de n , I_{2n+1} et de I_{2n-2} .
 - (a) A l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n} \times \sin(u)$, établir une minoration de J_n .
 - (b) A l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}tg(u)$, établir une majoration de J_n .
5. Montrer la convergence de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ puis déterminer sa valeur.