

Exercices Algèbre linéaire 3: Matrices

Etude d'un endomorphisme

On désigne par $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifie dans la suite les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ avec leurs fonctions polynomiale associée. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On définit les applications f et φ sur $\mathbb{R}_2[X]$ respectivement dans $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}$ par:

$$f(P) = \frac{1}{2} \left(P \left(\frac{X}{2} \right) + P \left(\frac{X+1}{2} \right) \right) \quad \text{et} \quad \varphi(P) = P(2).$$

On rappelle que l'on note $f^0 = Id_{\mathbb{R}_2[X]}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

A. Etude de deux applications

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-même.
2. Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}$.
3. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$. L'application f est-elle injective? surjective?
4. Déterminer une base de $\text{Ker}(\varphi)$. Quelle est la dimension de $\text{Ker}(\varphi)$? φ est-elle injective? Surjective?

B. Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Enfin, on note $\mathcal{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par $\mathcal{B}' = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1)$.

1. Justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ ainsi que son inverse.
3. Ecrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Expliciter les coefficients de A^n .
5. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c et déduire:

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt.$$

Trace d'un endomorphisme

On désigne par n un entier naturel et par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre n . Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la trace de A par $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$. On désigne par E un espace vectoriel réel de dimension n et par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes sur E . On désigne par $\mathcal{B}$ la base canonique de E , et on note $M_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ relativement à la base $\mathcal{B}$. Enfin, on désigne par id_E l'endomorphisme identité de E .

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer alors que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
2. Montrer que si P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A)$.
3. En déduire que $\text{Tr}(M_{\mathcal{B}}(u))$ est indépendante de la base $\mathcal{B}$ choisie.

On dit alors que la Tr est invariante par changement de base: on peut alors définir la trace de l'endomorphisme u comme étant la trace de sa matrice associée dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E . On la note $\text{Tr}(u)$.

4. Montrer que l'application $u \mapsto \text{Tr}(u)$ est une forme linéaire de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathbb{R}$.
Calculer $\text{Tr}(\text{id}_E)$.
5. Montrer que pour tout couple d'endomorphismes $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, on a $\text{Tr}(u \circ v) = \text{Tr}(v \circ u)$.
6. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .
 - (a) Montrer qu'il existe un unique élément $u_{i,j} \in \mathcal{L}(E)$ tel que, $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, $u_{i,j}(e_k) = e_i$ si $k = j$ et 0 sinon.
 - (b) Montrer que $(u_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$. Exprimer id_E dans la base précédente.

Matrices pseudo-magiques — Soit n un entier naturel non nul. Dans tout le problème, on notera J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $L_i(A)$ la somme des éléments de la i -ième ligne de A : $L_i(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on note $C_j(A)$ la somme des éléments de la j -ième colonne de A : $C_j(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}$. On appelle **matrice pseudo-magique** toute matrice A telle que les $2n$ nombres $L_i(A)$

$(1 \leq i \leq n)$ et $C_j(A)$ $(1 \leq j \leq n)$ aient la même valeur (même somme sur chaque ligne et sur chaque colonne). Dans ce cas, on notera $d(A)$ leur valeur commune.

On note enfin E l'ensemble des matrices pseudo-magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les L_i $(1 \leq i \leq n)$ et les C_j $(1 \leq j \leq n)$ sont des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que d est une forme linéaire sur E .
2. Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter les matrices AJ et JA à l'aide des sommes $L_i(A)$ et $C_j(A)$. En déduire qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à E si et seulement si $AJ = JA$. Que vaut la matrice AJ (ou JA) dans ce cas ?
3. Montrer que E est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que $d : E \rightarrow \mathbb{R}$ est un morphisme d'algèbres.
4. (a) Soit A une matrice de E . On suppose que A est inversible. Montrer alors que $d(A) \neq 0$, que $A^{-1} \in E$ et que $d(A^{-1}) = \frac{1}{d(A)}$.
(b) Une matrice A de E telle que $d(A) \neq 0$ est-elle nécessairement inversible ?
5. Soit $A \in E$. Montrer que la matrice $M = A - \frac{d(A)}{n}J$ appartient à E et calculer $d(M)$.
En déduire que les sous-espaces vectoriels $F = \text{Ker}(d) = \{A \in E \mid d(A) = 0\}$ et $G = \mathbb{R} \cdot J = \{\lambda J; \lambda \in \mathbb{R}\}$ sont supplémentaires dans E .

6. Dans cette question, $n = 3$. On donne une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

Écrire les six équations exprimant que la matrice A appartient au sous-espace $F = \text{Ker}(d)$ de la question précédente. De ce système, tirer a, b, c, d, g en fonction de e, f, h, i .

En déduire que A est combinaison linéaire des quatre matrices

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelle est alors la dimension de F , puis la dimension de E lorsque $n = 3$? Préciser une base de E .

7. Dans cette question, on reprend $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Si r et s sont deux éléments de l'intervalle entier $\{2, 3, \dots, n\}$, on note $T_{r,s}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients t_{ij} sont nuls sauf quatre d'entre eux, à savoir : $t_{11} = t_{rs} = 1$ et $t_{1s} = t_{r1} = -1$.
 - (a) Montrer que la famille $\mathcal{T} = (T_{r,s})_{(r,s) \in \{2,3,\dots,n\}^2}$ constitue une base de l'espace vectoriel F défini à la question 5.
 - (b) En déduire les dimensions de F et de E .