

Petit problème 1: Des suites classiques

On considère les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ définies par

$$\forall n \geq 1; \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Partie 1: Préliminaires

1. Montrer que pour tout réel x , on a $e^x \geq x + 1$.
2. En déduire que pour tout réel $t < 1$, on a $e^t \leq \frac{1}{1-t}$.
3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, nous avons $a_n \leq e \leq b_n$.

Partie 2 : Suites adjacentes

Soient f et g les fonctions définies sur $[1; +\infty[$ par

$$f(x) = (x+1) \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) \quad \text{et} \quad g(x) = x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$$

1. Etudier le sens de variation des fonctions f et g (on apportera grand soin à la rédaction des calculs nécessaires).
2. En déduire le sens de variation des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $b_n - a_n \leq \frac{e}{n}$.
4. Conclure au comportement des suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ et précisez leur(s) éventuelle(s) limite(s).

Partie 3: Applications

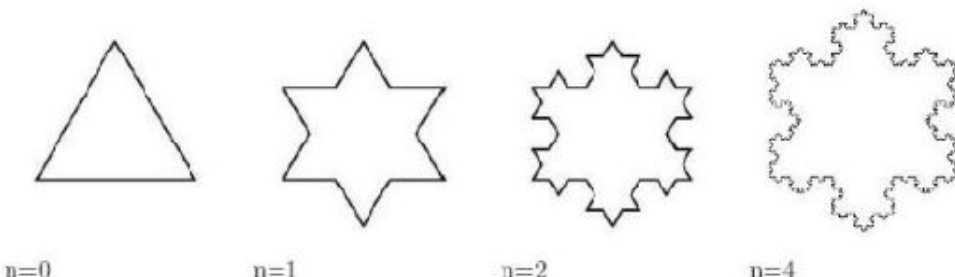
1. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.
Montrer que $u_{n+1} = \frac{1}{b_n}$ et en déduire la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On précisera son éventuelle limite.
2. Etudier le comportement de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = \left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$ et précisez son éventuelle limite.

Petit problème 2: Le flocon de Van Koch

On considère une suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de figures planes convexes générées de la façon suivante: F_0 est un triangle équilatéral de côté a (avec $a > 0$). On construit F_1 en divisant chaque segment de F_0 en trois parties égales: on construit alors un triangle équilatéral extérieur à la figure sur la partie du milieu et on supprime celle-ci. Aussi, F_1 est-il une étoile régulière à six branches (cf figure).

Pour construire F_{n+1} à partir de F_n , on divise chaque segment de F_n en trois parties égales: on construit alors, sur chaque partie centrale, un triangle équilatéral extérieur à la figure et on supprime cette partie.

La figure ci-dessous donne les figures F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 .



Dans la suite, on désigne par N_n , L_n , P_n et A_n respectivement le nombre d'arêtes, la longueur d'une arête, le périmètre et l'aire de la figure F_n . Ainsi, nous avons $N_0 = 3$, $L_0 = a$, $P_0 = 3a$ et $A_0 = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

1. Précisez les valeurs de N_1 , L_1 , P_1 et A_1 .
2. Etablir une formule donnant N_{n+1} en fonction de N_n , et une autre donnant L_{n+1} en fonction de L_n . En déduire, pour tout n , l'expression de N_n et de L_n en fonction de n et a .
3. Montrer que $P_n = \frac{4^n}{3^{n-1}}a$. Déterminer la nature ainsi que l'éventuelle limite de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Exprimer A_n comme la somme d'aire de triangles, et montrer que

$$A_n = A_0 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \frac{4}{9} \frac{1 - (4/9)^n}{1 - 4/9} a^2$$

5. Déterminer la nature ainsi que l'éventuelle limite de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
6. Soit F la figure obtenue comme limite des figures $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Quelle propriété a-t-on sur F ?

Petit problème 3: Irrationalité de e

A. Etude de deux suites

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$.

1. Etudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n) .
2. En déduire qu'elles sont convergentes et ont même limite. Dans la suite, nous noterons ℓ cette limite commune.

B. Calcul exact de ℓ

Soit n un entier naturel $n \geq 1$. On pose, pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$.

1. (a) Calculer $f(0)$ et $f(1) = u_n$.
(b) Montrer que f est dérivable sur $[0; 1]$ et que $f'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}$. En déduire que $u_n \leq e$.
2. On pose, pour tout $x \in [0; 1]$, $g(x) = f(x) + \frac{x}{n!}$.
(a) Calculer $g'(x)$ et montrer que g est croissante sur $[0; 1]$.
(b) En déduire que $e - \frac{e}{n!} \leq u_n$.
(c) En déduire la valeur exacte de ℓ .

C. Irrationalité de e

On suppose dans cette question que e est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers naturels p et q tel que $e = \frac{p}{q}$.

1. Justifier que $u_q < \frac{p}{q} < v_q$.
2. Montrer que $N = pq! - qq!u_q$ est un entier naturel vérifiant $0 < N < 1$.
3. En déduire l'irrationalité de e .

D. Suite de Cauchy

1. Soient $m > n \geq 1$ deux entiers naturels. Montrer que

$$u_m - u_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

2. En déduire que (u_n) est une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$.
3. Un espace métrique E est dit *complet* si toute suite de Cauchy de E converge dans E . $\mathbb{Q}$ est-il complet ?