

Partie 1: Préliminaires

1. La fonction exponentielle étant convexe sur $\mathbb{R}$, nous en déduisons que sa courbe représentative est au dessus de ses tangentes. L'équation de la tangente en 0 est $y = x + 1$ d'où nous déduisons que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.

Méthodes: On peut ici soit introduire la fonction $f(x) = e^x - x - 1$ et en étudier le sens de variation (ne pas oublier de justifier par le théorème d'opérations algébriques sur les fonctions dérivables qu'elle l'est), soit faire appel aux propriétés des fonctions convexes.

Rappels sur les fonctions convexes Rappelons que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe sur l'intervalle I si $\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. Géométriquement, lorsque λ parcourt $[0, 1]$, le point de coordonnées $(\lambda x + (1 - \lambda)y; f(\lambda x + (1 - \lambda)y))$ parcourt la portion de la courbe représentative de f entre x et y , alors que le point de coordonnées $(\lambda x + (1 - \lambda)y; \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))$ décrit le segment $[AB]$ où $A(x; f(x))$ et $B(y; f(y))$. Ainsi, l'inégalité proposée indique donc que la courbe est sous la corde.

Rappelons que si f est convexe sur l'ouvert I , alors f est continue en tout point $x \in I$, f admet une dérivée à gauche et à droite en tout point $x \in I$, et les fonctions f'_g et f'_d sont croissantes. De cette dernière propriété, on déduit que l'ensemble des points pour lesquels f n'est pas dérivable est au plus dénombrable.

Un critère de convexité lorsque f est dérivable: Si la fonction f est dérivable sur I , alors f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I . Aussi, si f est deux fois dérivable et $f'' > 0$, alors f est convexe.

2. Soit $t < 1$. D'après l'inégalité précédente appliquée en $x = -t$, nous obtenons que $e^{-t} \geq 1 - t$, soit $\frac{1}{e^t} \geq 1 - t$. Comme $t < 1$, alors $1 - t > 0$. Comme la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ nous en déduisons que $e^t \geq 1 - t$ d'où l'inégalité souhaitée.
3. De l'inégalité 1 prise pour $x = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ nous déduisons que $e^{1/n} \geq 1 + \frac{1}{n}$, d'où par croissance de la fonction puissance $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$ nous déduisons que $e \geq (1 + \frac{1}{n})^n$: nous avons donc pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq e$.
En appliquant l'inégalité 2 avec $x = \frac{1}{n+1}$ nous en déduisons que $e^{1/(n+1)} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = 1 + \frac{1}{n}$. Par croissance de la fonction puissance $x \mapsto x^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$, nous déduisons que $e \leq (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, soit pour tout entier naturel $n \neq 0, e \leq b_n$.
4. Nous avons $\forall n \geq 1, b_n - a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} - (1 + \frac{1}{n})^n = \frac{1}{n} (1 + \frac{1}{n})^n \leq \frac{e}{n}$.

Partie 2 : Suites adjacentes

1. Soit donc la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = (x+1) \ln(\frac{x+1}{x})$. Cette fonction est dérivable sur $[1; +\infty[$ comme produit et composée de fonction dérivables. Nous avons: $d \frac{d}{dx} (\frac{x+1}{x}) = \frac{-1}{x^2}$, $\frac{d}{dx} \ln(\frac{x+1}{x}) = \frac{-1}{x(x+1)}$ d'où nous déduisons que $f'(x) = \ln(\frac{x+1}{x}) - \frac{1}{x}$. La fonction f' étant dérivable, étudions sa dérivée seconde: Etudions la dérivée seconde: $-\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(x+1) > 0$. Aussi nous en déduisons que f' est strictement croissante: or, par les théorèmes de composition des limites et d'opérations algébriques sur les limites, nous avons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, d'où $f' < 0$ sur $[1; +\infty[$. Aussi, la fonction f est-elle strictement décroissante.

Remarques: • Au lieu d'étudier la dérivée seconde, il y avait plus astucieux: utiliser l'inégalité **I.1**. En effet puisque pour tout réel x nous avons $e^x \geq x + 1$, il s'ensuit par croissance de la fonction logarithme que pour tout $x > -1$, $x \geq \ln(x+1)$. En remplaçant x par $\frac{1}{x}$ on en déduit que $\frac{1}{x} \geq \ln(1 + \frac{1}{x})$ soit $f'(x) < 0$ pour tout $x > -1$.

• Néanmoins sans voir cette astuce, le calcul était possible: il faut faire preuve de persévérance et d'ordre dans ses calculs! Ici, le calcul de la dérivée de f peut poser problème à qui ne s'organise pas bien... Ce calcul est néanmoins faisable dès la TS.

• On fera bien attention à la stricte monotonie de f' : ici, elle est nécessaire pour conclure à la stricte décroissance de f .

De même, nous avons g dérivable. Il s'ensuit que $g'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$. En dérivant une seconde fois, nous obtenons $g''(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$. Aussi, la fonction g'' est strictement négative sur $[1; +\infty[$ donc g' est strictement décroissante sur cet intervalle. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} g'(x) = 0$ nous en déduisons que g' est strictement positive sur $[1; +\infty[$, d'où g est strictement croissante sur cet intervalle.

2. Nous avons $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ d'où comme de manière évidente $\forall n \geq 1$, $a_n > 0$ nous avons $\ln(a_n) = n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Il s'ensuit alors que $\ln(a_n) = g(n)$. Par stricte croissance de g , nous avons donc $\ln(a_{n+1}) > \ln(a_n)$ d'où par stricte croissance de la fonction exponentielle il s'ensuit que $a_{n+1} > a_n$. Aussi, la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

En remarquant que $\ln(b_n) = f(n)$, nous déduisons par des arguments similaires que $(b_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

3. Pour tout $n \geq 1$, nous avons $b_n - a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Par **I.1** nous savons que $e^{1/n} \geq \frac{1}{1-1/n}$ d'où par croissance de la fonction puissance $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ il s'ensuit que $e \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. On a donc $b_n - a_n \leq \frac{e}{n}$.

4. La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est croissante, la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et la limite de leurs différences est nulle: il s'ensuit donc que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Elles sont donc convergentes et ont même limite.

De **I.3** nous déduisons que leur limite commune est e .

Partie 3: Applications

1. Nous avons donc $1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+n}}$ d'où en élevant à la puissance n nous obtenons:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{1+n}}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{1+n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{1+n}\right)^{n+1}}$$

Nous en déduisons que $u_{n+1} = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{1+n}}\right)^{n+1} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$. Aussi, par le théorème d'opérations algébriques sur les suites convergentes, nous obtenons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{e}$.

2. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente: en effet, nous remarquons que $v_{2n} = a_{2n}$ alors que $v_{2n+1} = u_{2n+1}$. Aussi, elle ne peut admettre de limite (cela contredirait l'unicité de la limite d'une suite), d'où $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente.

En d'autres termes, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet deux sous-suites convergentes vers deux limites différentes, donc diverge, ou encore la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet e et $1/e$ pour valeurs d'adhérence, donc diverge.

Solution: Flocon de Van Koch

1. Nous avons $N_1 = 9$, $L_1 = \frac{1}{3}a$, $P_1 = 9 \times \frac{a}{3} = 3a$. Nous savons que la formule de l'aire d'un triangle est $Aire = \frac{Base \times Hauteur}{2}$. On peut aisément calculer la longueur de la hauteur à l'aire du théorème de Pythagore: le triangle étant équilatéral, la hauteur est aussi médiatrice, d'où $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$. Il s'ensuit alors que $A_1 = \frac{\sqrt{3}a^2}{4 \times 3^2}$.
2. Une arête de F_n donne naissance à 4 arêtes dans F_{n+1} . Aussi, en déduisons-nous que $N_{n+1} = 4N_n$. Comme $N_0 = 1$ il s'ensuit que $N_n = 4^n$.
Soit une arête de F_n : elle donne donc naissance, dans F_{n+1} à 4 arêtes de longueur $L_{n+1} = \frac{1}{3}L_n$. Aussi, comme $L_0 = a$ nous en déduisons que $L_n = \frac{a}{3^{n-1}}$.
3. Comme $P_n = L_n \times N_n$, nous avons $P_n = 4^n \times \frac{a}{3^{n-1}} = \frac{4^n a}{3^{n-1}}$. Comme $\frac{4^n}{3^{n-1}} = 4 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ et que $\frac{4}{3} > 1$ il s'ensuit que $P_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.
4. Partons donc de F_n . Par découpage, l'aire de F_{n+1} est égale à celle de F_n augmenté de l'aire de 4^n triangles équilatéraux construits. Chacun d'eux ayant pour aire $\frac{\sqrt{3}}{4}L_n^2 = \frac{\sqrt{3}a^2}{3^{2n-2}}$. $a_{n+1} = a_n + 4^n \times \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}$. Par telescoping, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9^2} + \dots + \frac{4^n}{9^{n+1}} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4 \times 9} \left(1 + \frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^n \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4 \times 9} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{9}}
 \end{aligned}$$

5. Comme $4/9 < 1$, nous en déduisons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$, d'où par le théorème d'opérations algébriques sur les suites convergentes nous déduisons que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et de limite $\frac{3}{20}$.
6. En passant à la limite F de la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ de courbes, nous obtenons une courbe de longueur infinie mais dont l'aire (définie entre F et $[AB]$) est finie ... ce qui est assez étonnant!

Solution: Irrationalité de e **A. Etude de deux suites**

1. La suite (u_n) est clairement strictement croissante puisque $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. Etudions la monotonie de la suite (v_n) .

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{1}{n(n+1)(n+1)!} (n(n+1) + n - (n+1)^2) = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!}$$

Aussi, la suite (v_n) est-elle décroissante.

2. Nous avons $v_n - u_n = \frac{1}{nn!} \rightarrow 0$ d'où nous déduisons que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Aussi, elles sont convergentes et ont même limite: soit ℓ celle-ci.

B. Calcul exact de ℓ

1. (a) Nous avons $f(0) = 1$ et $f(1) = u_n e^{-1}$.

- (b) La fonction f est le produit d'une fonction polynomiale avec la fonction $x \mapsto e^{-x}$ qui sont toutes deux continues. Aussi, d'après le théorème d'opérations algébriques sur les fonctions dérivables, la fonction f est dérivable et nous avons: $f'(x) = -\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x} + \left(\frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \dots + \frac{nx^{n-1}}{n!}\right)e^{-x} = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}$.
 Nous déduisons alors que la fonction f' est strictement négative sur $[0; 1]$ d'où la fonction f est strictement décroissante sur $[0; 1]$. Comme $f(0) = 1$, la stricte décroissance de la fonction f implique que $f(1) < 1$ d'où $u_n e^{-1} < 1$ soit $u_n < e$.
2. (a) La fonction g est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables et nous avons $g'(x) = f'(x) + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^n}{n!}e^{-x}$.
 Pour tout $x \in [0; 1]$, nous avons $0 \leq x^n \leq x^{n-1}$. Il s'ensuit alors que $\frac{1}{n} \cdot \frac{x^n}{(n-1)!} \leq \frac{x^n}{(n-1)!} \leq \frac{x^n}{n!}$.
 Enfin, comme $0 < e^{-1} < 1$ il s'ensuit que $g'(x) > 0$ sur $[0; 1]$ d'où la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.
- (b) Nous avons $g(0) = 1$ et $g(1) = f(1) + \frac{1}{n} = u_n e^{-1} + \frac{1}{n}$. Par croissance de g , nous déduisons que $g(0) < g(1)$ d'où $1 < u_n e^{-1} + \frac{1}{n}$ et par suite $e - \frac{e}{n} < u_n$.
- (c) Nous avons donc l'encadrement, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $e - \frac{e}{n!} \leq u_n \leq e$. Aussi, par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, nous déduisons du théorème des gendarmes que (u_n) converge vers e .
 Par unicité de la limite, nous avons $\ell = e$.

Irrationalité de e

- (a) Les suites (u_n) et (v_n) étant adjacentes et de limite e , nous en déduisons que pour tout entier naturel $n \geq 1$, nous avons $u_n \leq e \leq v_n$. De plus, les suites (u_n) et (v_n) étant strictement monotones, nous en déduisons qu'elles ne sont jamais égales à leur limite: aussi, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < e < v_n$. En particulier, cette encadrement est vrai pour $n = p$.
- (b) $q!u_q = q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \dots + \frac{q!}{q!}$ est un entier naturel comme somme d'entiers naturels. De plus, $pq!$ étant un entier, la différence $pq! - qq!u_q$ est un entier (relatif) donc $N \in \mathbb{Z}$.
 Nous avons par la question précédente que $u_q < \frac{p}{q} < v_q = u_q + \frac{1}{q \times q!}$. En multipliant cette inégalité par $q \times q!$, nous en déduisons que $q \times u_q q! < pq! < qq!u_q + 1$, d'où $0 < pq! - qq!u_q < 1$.
- (c) Nous en déduisons alors une absurdité puisque N est un entier naturel strictement compris entre deux entiers naturels successifs. Aussi, l'hypothèse initiale (e est un rationnel) est fausse et donc nous en déduisons que e est un irrationnel.