

Continuité: Exercices TS

Solutions

Jean-François Culus

8 octobre 2017

Montrer que l'équation $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1 = 0$ admet exactement trois solutions

Posons $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$. Comme g est un polynôme, elle est dérivable.

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2) = 4x(x - 1)(x - 2)$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$		-1		0		-1		$+\infty$

Sur $] -\infty, 0]$, la fonction g est strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $] -\infty; 0]$ sur $[-1; +\infty[$. Aussi, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, g s'annule une fois sur $] -\infty; 0]$.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$								

Par stricte croissance de g sur $[2; +\infty[$, on en déduit que la fonction g réalise une bijection de $[2; +\infty[$ sur $[-1; +\infty[$. Aussi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires g s'annule une unique fois sur $[2; +\infty[$.

Ainsi, g s'annule trois fois sur $\mathbb{R}$.

1. Calcul du volume d'eau versé dans le récipient

L'eau versé est telle que la surface de l'eau affleure la bille : aussi, le volume de l'eau + de la bille est égale à $V_{total} = (\pi \times 10^2) \times 8 = 800\pi$.

On a $V_{billet} = \frac{4}{3}\pi 4^3 = \frac{256}{3}\pi$.

Il s'ensuit que $V_{eau} = V_{Total} - V_{Bille} = \left(800 - \frac{256}{3}\right)\pi = \frac{2144}{3}\pi$.

2. Intervalle de R

R est le rayon de la seconde bille : comme celle-ci doit être insérée dans le récipient cylindrique, on en déduit que $0 \leq R \leq 10$.

3. Nouveau volume

Supposons que la seconde bille, de rayon R soit telle que la surface de l'eau affleure. Alors, le volume total (occupé par l'eau + la bille) est de

$$V_{Total} = (\pi \times 10^2) \times 2R = 200\pi$$

D'un autre côté, ce volume étant occupé par la nouvelle bille et l'eau, nous en déduisons que

$$V_{Total} = V_{Bille} + V_{eau} = \frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{2144}{3}\pi = \left(\frac{4}{3}R^3 + \frac{2144}{3}\right)\pi$$

En égalant ces deux expressions, nous en déduisons que

$$4R^3 - 600R + 2144 = 0 \quad \text{soit} \quad R^3 - 150R + 536 = 0$$

Aussi, R est bien solution de l'équation $x^3 - 150x + 536 = 0$.

4. Justifions que le problème admet une solution

Soit $f(x) = x^3 - 150x + 536$. La fonction f est dérivable en tant que polynôme et donc $f'(x) = 3x^2 - 150$. Elle s'annule en $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. On en déduit que f est décroissante sur $[0; 5\sqrt{2}]$ et croissante sur $[5\sqrt{2}; 10]$.

$f(0) = 536 > 0$, $f(5\sqrt{2}) = 536 - 500\sqrt{2} < 0$ et $f(10) > 0$ d'où par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule une unique fois sur $[0; 5\sqrt{2}]$ et une unique fois sur $[5\sqrt{2}; 10]$.

Aussi, il existe une unique valeur $R \in [5\sqrt{2}; 10]$ pour laquelle l'eau affleure à la surface de la bille.

1. Vérifions que $t(x) = \frac{1}{4}\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{5}(x-6)$

Posons donc $OH = x$. Le triangle AOH étant rectangle en O , nous en déduisons par le théorème de Pythagore que

$$AH^2 = AO^2 + OH^2 = 1^2 + x^2 \text{ d'où } AH = \sqrt{1+x^2}.$$

Nous parcourons cette distance AH à la vitesse de 4km/h donc comme $v = \frac{d}{t}$ on en déduit que $t = \frac{d}{v}$ d'où on met $t_{\text{mer}} = \frac{1}{4}\sqrt{1+x^2}$ heure pour parcourir AH sur mer.

Sur le sol, on se déplace à la vitesse de 5km/h pour parcourir la distance $HB = OB - OH = 6 - x$ d'où nous déduisons que $t_{\text{terre}} = \frac{1}{5}(x-6)$. Il s'ensuit que le temps total vérifie

$$t(x) = \frac{1}{4}\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{5}(x-6)$$

2. Calcul de $t'(x)$ et variations de $t(x)$

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{1}{4}\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{5}(x-6) \\ t'(x) &= \frac{1}{4} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} (5x - 4\sqrt{x^2+1}) \\ t'(x) = 0 &\Leftrightarrow 5x = 4\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Aussi, la fonction r est décroissante sur $[0; 4/3]$ et croissante sur $[4/3; 6]$.
Il s'ensuit que t atteint un minimum en $4/3$.

1. Calcul de $f(0)$

Nous savons que, pour tout réel x , nous avons $f'^2(x) - f(x)^2 = 1$.
Ainsi, $f(0)^2 = f'(0)^2 - 1$. Or, comme $f'(0) = 1$ on en déduit que $f'(0) = 0$.

2. Justifions que pour tout réel x , $f'(x) \neq 0$

Nous avons donc la relation fonctionnelle, pour tout x réel

$$f'^2(x) - f^2(x) = 1 \quad \text{rightarrow} \quad f'^2(x) = 1 + f^2(x) > 0$$

Aussi, puisque $f'^2(x) > 0$ nous déduisons que $f'(x) \neq 0$. Ainsi, la fonction f' ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

3. Montrons que $f''(x) = f(x)$

Nous avons donc que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)^2 - f(x)^2 = 1$.

Puisque f et f' sont des fonctions dérivables, nous pouvons dériver cette égalité (de fonctions). On en déduit alors que

$2f'(x)f''(x) - 2f'(x)f(x) = 0$ soit

$$2f'(x)(f''(x) - f(x)) = 0$$

Nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = f(x)$.

$$4. u = f + f'$$

a.

La fonction u est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Aussi nous avons

$$u' = f' + f'' = f' + f = u$$

Il s'ensuit alors que $u' = u$.

De plus, $u(0) = f(0) + f'(0) = 1 + 1 = 2$.

b. Nous en déduisons alors que $u(x) = 2e^x$.

$$5. v = f' - f$$

a.

La fonction v est dérivable comme somme / différence de fonctions dérivables, et nous avons $v' = f'' - f' = f - f' = -v$.

b. Nous en déduisons que $v(x) = e^{-x}$.

6. Fonction f

Nous remarquons que $u + v = 2f$ d'où

$$f(x) = \frac{1}{2} (2e^x + e^{-x})$$

1. Déterminer les distances AC et CD

Nous savons que le triangle ABC est rectangle en B . Aussi, par le théorème de Pythagore, nous avons

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65} \sim 8,06225$$

Nous savons que le triangle ABD est rectangle en B . Aussi,

$$\cos(\theta) = \frac{AB}{AD} = \frac{4}{AD} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{BD}{AD}$$

Aussi, $AD = \frac{4}{\cos(\theta)}$ et donc $BD = AD \sin(\theta) = 4 \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)$.

Comme C, B et D sont alignés dans cet ordre, nous en déduisons que

$$CD = CB + BD = 7 + 2 \tan(\theta)$$

1. Déterminer les distances AC et CD

Le camion roule à $60\text{km}/h$ et doit parcourir la distance

$$CD = 7 + 2 \tan(\theta) \text{ m} = \frac{1}{1000}(7 + 2 \tan(\theta)) \text{ km d'où } t_1 = \frac{d_1}{v_1} = \frac{7+2 \tan(\theta)}{60\,000} h.$$

Le lapin cours à $30\text{km}/h$ et doit parcourir la distance

$$AD = \frac{AB}{\cos(\theta)} = \frac{4}{\cos(\theta)} \text{ m} = \frac{4}{1000 \cos(\theta)} \text{ km. Aussi il met un temps}$$

$$t_2 = \frac{d_2}{v_2} = \frac{4}{30000 \cos(\theta)}.$$

$$2. f(\theta) = \frac{7}{2} + 2 \tan(\theta) - \frac{4}{\cos(\theta)}$$

Pour que le lapin arrive sain et sauf de l'autre côté de la route, il faut que le temps qu'il met pour traverser la route soit strictement inférieur à celui que met le camion pour arriver en D , soit $t_2 < t_1$.

Avec les précédentes expressions, nous obtenons alors :

$$\frac{4}{30000 \cos(\theta)} < \frac{7 + 2 \tan(\theta)}{60\,000} \Rightarrow 0 < \frac{7}{2} + 2 \tan(\theta) - \frac{4}{\cos(\theta)}$$

Pour $\theta \in [0; \pi/2[$, $\cos(\theta) \in]0, 1]$ donc ne s'annule pas. Aussi, la fonction f étant dérivable sur $[0; \pi/2[$ et nous obtenons

$$f'(\theta) = \frac{2}{\cos^2(\theta)} - \frac{4 \sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}$$

3. Conclusion

$$f'(\theta) = \frac{2}{\cos^2(\theta)} - \frac{4 \sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{2(1 - 2 \sin(\theta))}{\cos^2(\theta)}$$

x	0	$\pi/6$	$\pi/2$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{21-12\sqrt{3}}{6}$	$-\infty$

On remarque alors que $f(\pi/6) = \frac{21-12\sqrt{3}}{6} > 0$. Aussi, le lapin peut ressortir en vie s'il prends un angle très proche de $\pi/6$.