

EC 222. Réduction d'endomorphismes

Partie 3: Réduction des endomorphismes

Jean-François Culus

27 février 2016

- Diagonalisabilité
- Critères de diagonalisabilité
- Trigonalisabilité
- Un critère bonus !

Dans tout ce cours, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

E Espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$.

$u \in \mathcal{L}(E)$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . On désigne par $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ ses valeurs propres.

$\chi_u, P \in \mathbb{K}[X]$

χ_u est le polynôme caractéristique de u . Si λ est une racine de P , on désigne par $m(\lambda)$ son ordre de multiplicité.

Définition : Diagonalisabilité

On dit que l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \dots & \vdots \\ \dots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_p I_{m_p} \end{pmatrix}$$

Corollaire

u est diagonalisable si et seulement si E est somme directe des sous-espaces propres de u ($E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_{\lambda}(u)$), ou encore, si et seulement si E admet une base de vecteurs propres.

Une première caractérisation

Rappel polynôme annulateur

Si P est un polynôme annulateur de u , alors $\forall \lambda \in Sp(u)$, $P(\lambda) = 0$ et si λ est racine d'ordre de multiplicité m_λ dans P , alors $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m(\lambda)$.

Théorème

Si P est un polynôme scindé à racines simples annihilant l'endomorphisme u , alors u est diagonalisable.

$P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_p) \times (X - \mu_1) \dots (X - \mu_k)$.
On a $P(u) = 0$ donc par le lemme des noyaux

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^p \underbrace{\text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)}_{=E_{\lambda_i}(u)} \oplus \bigoplus_{j=1}^k \underbrace{\text{Ker}(u - \mu_j \text{id})}_{=\{0_E\}}$$

Un exemple, et un contre exemple ...

Corollaire

Si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.

Corollaire

La réciproque est fausse : si χ_u n'est pas scindé à racines simples, l'endomorphisme u peut être diagonalisable.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \chi(X) = \det(I_n - XI_n) = (1 - X)^n$$

Polynôme caractéristique est diagonalisabilité

Théorème

u est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et la dimension de chaque espace propre est égal à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

Rappel

Deux matrices semblables ont même polynôme.

Théorème

$u \in \mathcal{L}(E)$ et $Sp(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$, alors u est diagonalisable si et seulement si $\sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(u)) = n$.

Définition : Trigonalisable

On dit que l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

Proposition

Si u est trigonalisable, alors son polynôme caractéristique est scindé.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\chi_u(X) = \det(u - X \text{Id}_E) = \det(M - X I_n) = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X)(\lambda_n - X).$$

Théorème

L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Démo : Récurrence sur $n = \dim(E)$.

χ_u est scindé : soit $\lambda_1 \in Sp(u)$ et $e_1 \in E_{\lambda_1}(u)$. Dans

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & N \end{pmatrix}$. $G = Vect(e_2, \dots, e_n)$ et

$p : E \rightarrow G$ projection sur G parallèlement à $\mathbb{K}e_1$. $v = p \circ u|_G$.

$N = Mat_{(e_2, \dots, e_n)}(v)$.

$\chi_u(X) = (\lambda - X)\chi_v(X)$, donc χ_v est scindé. Soit $(e'_2, \dots, e'_n)$ base de G dans laquelle v est trigonale, ie $p(u(e'_j)) \in Vect(e'_2, \dots, e'_j)$.

Alors u est trigonale dans $\mathcal{B}' = (e_1, e'_2, \dots, e'_n)$.

Critères de diagonalisation

- S'il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples, alors u diagonalisable.
- u diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et $\forall \lambda \in Sp(u), \dim(E_\lambda(u)) = m(\lambda)$

Critère de trigonalisation

L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé.

Corollaire

Toute matrice est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.

Critère de diagonalisation

Toute matrice réelle symétrique est diagonalisable.

$$\langle X; Y \rangle = \sum_{i=1}^n X_i Y_i = {}^t X \cdot Y.$$

Définition : Produit scalaire / Produit hermitien

Si E est un espace vectoriel réel, $\langle X, Y \rangle = {}^t X \cdot Y$ est un produit scalaire sur E .

Si E est un espace vectoriel complexe, $\langle X; Y \rangle = {}^t \overline{X} \cdot Y$.

Rappel $\langle X; X \rangle = \|X\|^2$.

Démonstration (espace euclidien / hermitien)

Proposition

Si A est une matrice réelle symétrique, alors χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$.

χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$: soit $\lambda \in \mathbb{C}$ racine de χ_A . $AX = \lambda X$, d'où ${}^t\overline{X} \cdot \underbrace{{}^t\overline{A}}_{=A} = \overline{\lambda} {}^t\overline{X}$.

$${}^t\overline{X}AX = \overline{\lambda} {}^t\overline{X}X = \overline{\lambda}\|X\|^2$$

$${}^t\overline{X}AX = {}^t\overline{X}\lambda X = \lambda\|X\|^2$$

On a donc $\lambda = \overline{\lambda}$ d'où $\lambda \in \mathbb{R}$. χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$.

$\dim(E) = n$. $\lambda_1 \in Sp(u)$, e_1 vecteur propre associé,
 $F = Vect(e_1)^\perp$.

• Montrons $u(F) \subset F$. Soit $x \in F$.

$$\langle AX; e_1 \rangle = {}^t(AX) \cdot e_1 = {}^tX A e_1 = \langle X; A e_1 \rangle = \langle X; \lambda_1 e_1 \rangle = \lambda_1 \langle X; e_1 \rangle = 0.$$

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n). \quad M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}.$$