

Polynôme d'endomorphisme

Exercice 1: Savoir écrire un polynôme d'endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $(x, y) \in E^2$, $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Dire, pour chacune des écritures suivantes, si elle est correcte ou non. Dans les deux cas, explicitez le sens de l'écriture.

- | | | |
|--------------|-------------------------|----------------------|
| 1. $P(x)$ | 1. $P(u+v)(x)$ | 1. $(P+Q)(u)$ |
| 2. $P(u)$ | 2. $P(uv)(x)$ | 2. $(P \times Q)(u)$ |
| 3. $P(u(x))$ | 3. $P(u \circ v)(x)$ | 3. $(P \circ Q)(u)$ |
| 4. $P(u)(x)$ | 4. $P(u(x)v(y))$ | 4. $P(u) \circ Q(v)$ |
| | 5. $P(u(x) \circ v(x))$ | |
- Soient P et Q deux

polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On note $d = \max(\deg(P); \deg(Q))$ et $P(X) = \sum_{i=0}^d a_i X^i$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^d b_j X^j$. Montrer que $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. En déduire $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

Exercice 2: Propriétés classiques autour des valeurs propres d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On désigne par $Sp(A)$ le spectre de la matrice A (ie. l'ensemble des valeurs propres de A).

1. Montrer que $\lambda \in Sp(A)$ si et seulement si $A - \lambda I_n$ est non inversible.
2. On suppose que λ est l'unique valeur propre de A . Montrer alors que A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda I_n$.
3. Soit $\lambda \in Sp(A)$. Montrer alors que $\lambda^k \in Sp(A^k)$.
Montrer alors que si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\lambda \in Sp(A)$ implique $P(\lambda) \in Sp(P(A))$.
4. On suppose que $\lambda \in Sp(A)$ et que $A \in Gl_n(\mathbb{R})$. Montrer alors que $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de A^{-1} .
5. On considère dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.
 - (a) Calculer A^2 et A^3 et montrer que $A^3 - 2A^2 - M + 2I_3 = 0$.
 - (b) En déduire que les valeurs propres de A sont dans l'ensemble $\{-1, 1, 2\}$.
6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de A , ie. $P(A) = 0$. Montrer que les valeurs propres de A appartiennent à l'ensemble des racines de P (ie. $Sp(A) \subset Rac(P)$).

Exercice 3: Lemme des noyaux

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $Ker(P(u)) \oplus Ker(Q(u)) = Ker(PQ)(u)$.
2. Soient $(P_1, \dots, P_k)$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. Montrer que $Ker\left(\prod_{i=1}^k P_i\right)(u) = \bigoplus_{i=1}^k Ker(P_i(u))$.

Exercice 4: Polynôme minimal d'un endomorphisme

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . A tout polynôme $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, on considère l'endomorphisme $P(u) = a_0 Id_E + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_p u^p$ où $u^k = \underbrace{u \circ u \circ u \circ \dots \circ u}_k$ fois.

1. Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $\Phi : P \mapsto P(u)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$ -algèbres.
2. Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et soit D leur $Pgcd$ (ie. $D = P \wedge Q$).
 - (a) Démontrer que $Ker(D(u)) = Ker(P(u)) \cap Ker(Q(u))$ et $Im(D(u)) = Im(P(u)) + Im(Q(u))$.
 - (b) Que peut-on dire quand les polynômes P et Q sont premiers entre eux ?
 - (c) Soit $M = P \vee Q$ le PPCM des polynômes P et Q . Montrer que $Ker(M(u)) = Ker(P(u)) \cap Ker(Q(u))$ et $Im(M(u)) = Im(P(u)) \cap Im(Q(u))$.

On dit que le polynôme P est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0$. On note $\mathcal{N}(u)$ l'ensemble des polynômes annulateurs de l'endomorphisme u .

- (a) Montrer que $\mathcal{N}(u)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X]; +)$.
- (b) Montrer que $\mathcal{N}(u)$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X]; +; \times)$.
3. (a) Montrer que la famille $(Id_E, u, u^2, u^3, \dots, u^{n^2})$ est liée dans $\mathcal{L}(E)$. En déduire que $\mathcal{N}(u) \neq \{0\}$.
- (b) Montrer que l'ensemble des degrés des éléments non nuls de $\mathcal{N}(u)$ admet un plus petit élément: soit n_0 celui-ci.
- (c) Soit $P_0 \in \mathcal{N}(u)$ un polynôme de degré n_0 . Montrer que $\mathcal{N}(u) = P_0 \mathbb{K}[X]$ (ie. que $\mathcal{N}(u)$ est l'ensemble des polynômes multiples de P_0).
- (d) Montrer que le polynôme P_0 est unique à un facteur inversible près. On appelle alors **polynôme minimal** de u l'unique polynôme unitaire P_0 tel que $\mathcal{N}(u) = P_0 \mathbb{K}[X]$.