

Problème: Racines d'un polynôme & de son polynôme dérivé

Partie I: Racines réelles des polynômes réels (Capes 1999)

Pour cette partie, $n \geq 2$ et P est un polynôme unitaire de degré n , $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ (avec $a_n = 1$), dont toutes les racines sont réelles. On suppose que P admet au moins deux racines réelles différentes, et on note $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_p$ les racines réelles de P avec $p \in \{2, 3, \dots, n\}$. Pour tout entier j compris entre 1 et p , la racine λ_j est de multiplicité $m_j \geq 1$ avec $\sum_{j=1}^p m_j = n$.

1. Etude d'un exemple

On considère dans cette question $P(X) = (X-1)^2(X-2)$. Précisez quelles sont les racines de P et leur ordre de multiplicité.

Calculer alors le polynôme dérivé P' : quelles sont ses racines et leur ordre de multiplicité ?

Faire de même avec P'' .

2. Retour au cas général

On considère à présent P dans le cas général.

- (a) Ecrire P sous une forme factorisée en utilisant uniquement X et ses racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.
- (b) Montrer que le polynôme dérivé P' admet $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ pour racines de multiplicités respectives $m_1 - 1, m_2 - 1, m_3 - 1, \dots, m_p - 1$ (une multiplicité nulle signifie que λ_j n'est pas racine de P').
- (c) Montrer que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, il existe $\mu_j \in]\lambda_{j+1}, \lambda_j[$ tel que μ_j est racine de P' .
- (d) A t-on obtenu toutes les racines du polynôme P' ?
Ecrire P' sous forme factorisée en fonction de X , λ_j et μ_j .
- (e) Montrer que pour tout réel $x > \lambda_1$ et pour tout entier $k \in \{0, \dots, n\}$, $P^{(k)}(x) > 0$ où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P .

Partie II: Racines complexes des polynômes complexes (Capes 2009)

On dit qu'une partie Γ du plan $\mathcal{P}$ est convexe si, pour tout couple (A, B) de points de Γ , le segment $[AB]$ est contenu dans Γ , c'est-à-dire en notant a et b les affixes respectives des points A et B , si pour tout $\lambda \in [0, 1]$, le point M_λ d'affixe $\lambda a + (1 - \lambda)b$ appartient à Γ .

1. Soit P une partie de $\mathcal{P}$ et E l'ensemble des parties de $\mathcal{P}$ qui sont convexes et qui contiennent P . On pose $\mathcal{E}(P) = \bigcap_{\Gamma \in E} \Gamma$. Montrer que $\mathcal{E}(P)$ est la plus petite, au sens de l'inclusion partie convexe contenant P . Cette partie $\mathcal{E}(P)$ est appelée *l'enveloppe convexe* de P .
2. Soit $f(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n et soit f' son polynôme dérivé. Soit $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ l'ensemble des racines de $f(X)$ et soit α_j l'ordre de multiplicité de la racine r_j , pour tout $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Montrer que pour tout complexe z n'appartenant pas à l'ensemble $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$, on a;

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{z - r_j}$$

3. Soit $r \in \mathbb{C}$ une racine de $f'(X)$ n'appartenant pas à $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$. Montrer que

$$\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} (r - r_j) = 0$$

En déduire que le point M_r d'affixe r est le barycentre des points $M_1, M_2, \dots, M_m$ d'affixes respectives $r_1, r_2, \dots, r_m$.

4. Montrer alors que l'ensemble des points dont les affixes sont les racines de $f'(X)$ est inclus dans l'enveloppe convexe des points du plan dont les affixes sont les racines de $f(X)$ (*Théorème de Lucas*).