

Problème: Racines d'un polynôme (inspiré du Capes 1999)
Partie I: Racines réelles des polynômes réels (Capes 1999)

1. **Etude d'un exemple** $P(X) = (X-1)^2(X-2)$ donc les racines de P sont 1 (double) et 2 (simple).
 Nous avons $P'(X) = 2(X-1)(X-2) + (X-1)^2 = (X-1)(2X-4+X-1) = (X-1)(3X-5)$. Aussi, les racines de P' sont 1 (simples) et $5/3$ (simple aussi).
 Nous avons $P''(X) = (3X-5) + 3(X-1) = 6X-8 = 2(3X-4)$. L'unique racine (simple) de P'' est $4/3$.
2. **Retour au cas général**
 - (a) Puisque P est unitaire et que nous connaissons les racines avec leur ordre de multiplicités, nous avons $P(X) = \prod_{j=1}^p (X - \lambda_j)^{m_j}$.
 - (b) Calculons donc la dérivée du polynôme P : nous avons $P'(X) = \sum_{j=1}^p m_j (X - \lambda_j)^{m_j-1} \prod_{i \neq j} (X - \lambda_i)^{m_i} = \prod_{j=1}^p (X - \lambda_j)^{m_j-1} \left(\sum_{i=1}^p \alpha_j \prod_{i \neq j} (X - \lambda_i) \right)$. On en déduit alors que, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, λ_j est racine d'ordre $m_j - 1$ du polynôme dérivé $P'(X)$.
 - (c) Considérons donc deux racines consécutives $\lambda_{j+1} < \lambda_j$. La fonction polynomiale P étant dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[\lambda_{j+1}; \lambda_j]$, et $P(\lambda_j) = P(\lambda_{j+1}) = 0$, d'où 'après le théorème de Rolle nous savons qu'il existe $\mu_j \in]\lambda_{j+1}; \lambda_j[$ tel que $P'(\mu_j) = 0$. Aussi, nous obtenons $j - 1$ racines nouvelles du polynôme P .
 - (d) D'après la question 2., le polynôme P' admet $\sum_{j=0}^p (m_j - 1) = n - j$ racines communes avec le polynôme P (comptées avec leur ordre de multiplicité). D'après la question 3., nous avons obtenu $p - 1$ nouvelles racines de P' (non racine de P): aussi, nous avons obtenu $(n - p) + (p - 1) = n - 1$ racines de P' . Or, $\deg(P') = n - 1$ d'où nous en déduisons que nous avons toutes les racines de P' . Aussi, l'écriture factorisée de $P'(X)$ est $P'(X) = \alpha \prod_{j=1}^p (X - \lambda_j)^{m_j-1} \times \prod_{i=1}^{p-1} (X - \mu_j)$, où α est un réel. En identifiant les coefficients dominant de P' dans cette expression et dans celle obtenue à partir de la dérivation de $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on en déduit que $\alpha = na_n = n$ d'où

$$P'(X) = n \prod_{j=1}^p (X - \lambda_j)^{m_j-1} \times \prod_{i=1}^{p-1} (X - \mu_j)$$

Remarque: La dérivée d'un polynôme scindé est encore un polynôme scindé.

- (e) Remarquons déjà que λ_1 est la plus grande racine de P : aussi, $\forall x > \lambda_1$, $P(x)$ est de signe constant et comme P est unitaire, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ d'où $\forall x > \lambda_1$, $P(x) > 0$.
 D'après ce que nous venons de voir, les racines de P' , P'' , ..., $P^{(k)}$ seront toutes comprises dans l'intervalle $[\lambda_p; \lambda_1]$, donc $\forall x > \lambda_1$, $P^{(k)}(x)$ sera de signe constant. Comme le coefficient dominant de $P^{(k)}$ est $\frac{n!}{k!}$, on en déduit alors que ce signe est positif, d'où $\forall x > \lambda_1$, $P^{(k)}(x) > 0$.

Partie II: Racines complexes des polynômes complexes (Capes 2009)

1. Démontrons donc déjà que l'intersection de deux ensembles convexes est un ensemble convexe: soient P_1 et P_2 deux parties convexes du plan $\mathcal{P}$. Soient alors A et B deux points de $P_1 \cap P_2$. Alors comme P_1 est convexe, on a $[A; B] \subset P_1$ et $[A; B] \subset P_2$. Aussi, il s'ensuit que $[A; B] \subset P_1 \cap P_2$, et donc l'ensemble $P_1 \cap P_2$ est convexe.
 Il s'ensuit donc que l'ensemble $\mathcal{E} = \bigcap_{\Gamma \in E} \Gamma$ est une partie convexe du plan comme intersection d'ensembles convexes. De plus, c'est nécessairement la plus petite (au sens de l'inclusion) puisque si Γ_0 est une partie convexe du plan contenant P , alors $\Gamma_0 \in E$ et donc $\mathcal{E} \subset \Gamma_0$.
 On démontre ainsi que $\mathcal{E}$ est le plus petit ensemble convexe, au sens de l'inclusion, contenant la partie P .
2. Puisque nous connaissons toutes les racines de f (avec leur ordre de multiplicité), nous pouvons écrire ce polynôme sous forme factorisée: $f(X) = a_n \prod_{i=1}^m (X - r_i)^{\alpha_i}$. Comme f est unitaire, on a $a_n = 1$. En dérivant, nous obtenons $f'(X) = a_n \sum_{i=1}^m \alpha_i (X - r_i)^{\alpha_i-1} \prod_{j \neq i} (X - r_j)^{\alpha_j}$. Aussi, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{(z - r_i)}$$

3. Soit donc $r \in \mathbb{C}$ une racine de P' non racine de P . Alors $f'(r) = 0$, ce qui implique que $\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{(r-r_j)} = 0$. En utilisant la quantité conjuguée, nous avons alors $\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r-r_j|^2} (r - r_j) = 0$. On remarque alors que $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\gamma_j = \frac{\alpha_j}{|r-r_j|^2} \in \mathbb{R}_+$. Il s'ensuit alors que $r = \frac{\sum_{j=1}^m \gamma_j r_j}{\sum_{j=1}^m \gamma_j}$: nous reconnaissons alors que M_r est le barycentre à coefficient positif des M_{r_j} , donc est dans l'enveloppe convexe des M_{r_i} .
4. On en déduit alors que les racines (complexes) de P' sont soit des racines de P , soit des barycentres à coefficients > 0 des points d'affixes les racines de P . Aussi, les racines de P' sont-elles toutes dans l'enveloppe convexe des racines de P .