

Réduction des endomorphismes

Exercice 1: Caractérisation des homothéties vectorielles

Supposons que u converse toutes les droites vectorielles. Aussi, $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$. Le but est de montrer que λ_x est une constante. Déjà, montrons que $\lambda_x = \lambda_{\mu x}$ pour tout $\mu \in \mathbb{K}$. Nous avons donc, par définition de nos λ_x , que $u(x) = \lambda_x x$ et $u(\mu x) = \lambda_{\mu x} \mu x$. Or, par linéarité de u , on a $u(\mu x) = \mu u(x) = \mu \lambda_x x$ d'où $\lambda_{\mu x} = \lambda_x$. A présent, soit y non dans la droite vectorielle $\mathbb{K}x$: montrons que $\lambda_y = \lambda_x$. Pour ce faire, considérons $u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$. Or, par linéarité de u , on a $u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. Comme $\{x, y\}$ est une famille libre de E , nous en déduisons que $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$ d'où λ_x est indépendant du vecteur x : aussi, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in E, u(x) = \lambda x$. Aussi, u est une homothétie vectorielle.

Exercice 2: Théorème de Cayley-Hamilton**A. Question préliminaire**

Soit donc $\mathcal{B}_{can}$ la base canonique de E et $\mathcal{B}'$ une autre base de E . On considère alors la matrice de passage P de $\mathcal{B}_{can}$ à $\mathcal{B}'$: par la formule de changement de base, nous avons que $B = P^{-1}AP$. Aussi, par définition du polynôme caractéristique, nous avons $\chi_B(X) = \det(B - XI_n) = \det(P^{-1}AP - XI_n) = \det(P^{-1}(A - XI_n)P) = \det(P^{-1}) \times \underbrace{\det(A - XI_n)}_{=\chi_A(X)} \times \det(P)$. Or, $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$ d'où $\chi_A(X) = \chi_B(X)$. On vient de démontrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique

B. Un premier cas

1. Nous savons que la famille $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x), \dots; f^{n-1}(x))$ est libre (par hypothèse sur x): aussi, comme cette famille est maximale dans E (rappelons que $\dim(E) = n$), c'est une base de E . Aussi, puisque c'est une base de E , il existe $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que $f^n(x) = a_0 x + a_1 f(x) + a_2 f^2(x) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(x)$.

2. Nous avons, par la précédente relation $P(f)(x) = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x) \right)}_{=f^n(x)} - f^n(x) = 0_E$.

3. La matrice de f dans la base $(x; f(x); f^2(x); \dots; f^{n-1}(x))$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

4. On a par définition $\chi_A(X) = \begin{pmatrix} -X & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & -X & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - X \end{pmatrix}$. Développons ce déterminant selon sa dernière colonne. Etudions les différents mineurs séparément: $\chi_A(X) = (-1)^{n+1} (a_0 \Delta_{1,n} - a_1 \Delta_{2,n} + \dots + a_{n-2} \Delta_{n-1,n} +$

$$\text{avec } \Delta_{1,n} = \det \begin{pmatrix} 1 & -X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & -X \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Delta_{2,n} = \det \begin{pmatrix} -X & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -X \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_{3,n} = \det \begin{pmatrix} -X & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -X & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -X \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \text{et } \Delta_{n,n} = \begin{pmatrix} -X & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -X & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -X & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -X \end{pmatrix}$$

On en déduit alors que $\chi_A(X) = \pm P(X)$.

5. Calculons $P(f)$ pour tout vecteur de la base $\mathcal{B} = (x; f(x); f^2(x); \dots; f^{n-1}(x))$. Soit $j \in \{0; \dots; n-1\}$. Nous avons alors $P(f)(f^j(x)) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k - f^n \right) (f^j(x)) = f^j \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x) - f^n(x) \right) = f^j P(f)(x) = 0$. Aussi, nous déduisons que l'image par l'endomorphisme $P(f)$ de tout vecteur de la base $\mathcal{B} = (x; f(x); f^2(x); \dots; f^{n-1}(x))$ est nul, d'où $P(f)$ est l'endomorphisme nul.
- On en déduit alors, comme $\chi_A(f) = P(f) = 0$ que χ_A est un polynôme annulateur de f .

C. Etude du cas général

1. x étant non nul, la famille (x) est libre. Aussi, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}; (x; f(x); \dots; f^{k-1}(x)) \text{ libre}\}$ est non vide, et est majorée par $n+1$ (car toute famille de $n+1$ vecteur de E est nécessairement liée). Aussi, cet ensemble admet un plus grand élément: celui-ci vérifie donc $(x; f(x); \dots; f^{k-1}(x))$ libre et $(x; f(x); \dots; f^{k-1}(x); f^k(x))$ liée.

2. Soit $y \in F$, donc y s'écrit $y = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i f^i(x)$. On a donc, par linéarité de f , $f(y) = f\left(\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i f^i(x)\right) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i f^{i+1}(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{\alpha_{i-1} f^i(x)}_{\in F} + f^k(x)$. Or, nous savons que la famille $(x; f(x); \dots; f^{k-1}(x); f^k(x))$ est liée

alors que la famille $(x; f(x); \dots; f^{k-1}(x))$ est libre. Aussi, $f^k(x) \in F$, d'où $f(y) \in F$. On en déduit donc bien que F est stable par f .

Aussi, $g = f|_F$ est donc un endomorphisme de F dans F (il est bien à valeurs dans F et est linéaire car f l'est).

3. Par le théorème de la base incomplète, nous pouvons compléter la famille libre $(x; f(x); f^2(x); \dots; f^{k-1}(x))$ en une base de E . Comme $\dim(E) = n$, il faut ajouter $n - (k-1) = n - k + 1$ vecteurs $y_k; y_{k+1}; \dots; y_n$. Soit $\mathcal{B}'$ cette base. Dans celle-ci, la matrice de f est $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où A est la matrice de $g = f|_F$, donc de la forme précédente.

4. Le calcul du déterminant par bloc montre que $\chi_f(X) = \det(f - X \text{Id}_E) = \underbrace{\det(A - X I_{k-1})}_{\chi_g(X)} \times \underbrace{\det(B - X i_{n-k+1})}_{=Q(X)}$.

5. Nous avons donc $\chi_f(f)(x) = (\chi_g \circ Q)(f)(x) = Q(f)(\chi_g(f)(x))$. Or, $f(x) = g(x)$ car $x \in F$, d'où $\chi_f(f)(x) = Q(f)(\chi_g(g)(x))$. Or, g et x vérifient les hypothèses de la partie **B**. d'où $\chi_g(g)(x) = 0$. On en déduit alors que $\chi_f(f)(x) = 0$.

Pour tout vecteur x non nul, nous effectuons le travail de la partie **C.**, et nous obtenons que $\chi_f(f)(x) = 0$ pour tout vecteur $x \in E$. Il s'ensuit donc que $\chi_f(f) = 0$. Aussi, nous avons démontré le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 3: Sous-espaces stables

1. Soient donc u et v deux endomorphismes commutants. Soit $x \in \text{Ker}(u)$: montrons que $v(x) \in \text{Ker}(u)$. Pour ce faire, calculons $u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(0_E) = 0_E$ d'où $v(x) \in \text{Ker}(u)$. De même, si $y \in \text{Im}(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et donc $v(y) = v \circ u(x) = u \circ v(x) \in \text{Im}(u)$.
2. Il suffit de remarquer que u et $P(u)$ commutent.

Exercice 4: Réduction simultanée

1. Le cas $n = 1$ est évident, puisque toute matrice est diagonale!
2. (a) Si f est une homothétie, alors dans toute base de E , la matrice associée à f est λI_n . Aussi, il suffit de considérer la base $\mathcal{B}_g$ de vecteurs propres de g pour obtenir une base dans laquelle les deux endomorphismes sont diagonaux.
 (b) Considérons donc $i \in \{1, \dots, p\}$ et $x \in E_{\lambda_i}$ (c'est-à-dire que $f(x) = \lambda_i x$). Montrons donc que $g(x) \in E_{\lambda_i}$. Pour ce faire, calculons $f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(\lambda_i x) = \lambda_i g(x)$, d'où g laisse stable l'espace propre E_{λ_i} . On en déduit en particulier que la restriction $g|_{E_{\lambda_i}}$ de g à E_{λ_i} est un endomorphisme de E_{λ_i} .
 (c) Puisque f est diagonalisable, nous savons que E se décompose en somme directe des sous-espaces propres pour f , soit $E = \bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}$. Comme f n'est pas une homothétie, tous les sous-espaces propres de f sont de dimension strictement inférieurs à n , soit $\dim(E_{\lambda_i}) < n$. Aussi, par l'hypothèse de récurrence, il existe une base $(e_1^i, e_2^i, \dots, e_{a_i}^i)$ de E_{λ_i} dans laquelle les endomorphismes $f|_{E_{\lambda_i}}$ et $g|_{E_{\lambda_i}}$ sont simultanément diagonaux. Aussi, en concaténant l'ensemble de ces bases, nous obtenons une base de E dans laquelle f et g sont simultanément diagonaux.

Solution exercice 5: Endomorphismes itérés

1. Montrons que la suite $(\text{Ker}(u^p))_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire que pour tout entier naturel p , $\text{Ker}(u^p) \subset \text{Ker}(u^{p+1})$.
 Soit donc $p \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \text{Ker}(u^p)$. Alors $u^{p+1}(x) = u(u^p(x)) = u(0) = 0$ donc $x \in \text{Ker}(u^{p+1})$ ce qui prouve la croissance de la suite $(\text{Ker}(u^p))_{p \in \mathbb{N}}$.
 Soit à présent $x \in \text{Im}(u^{p+1})$. Alors, il existe $y \in E$ tel que $x = u^{p+1}(y) = u^p(u(y)) \in \text{Im}(u^p)$ d'où $\text{Im}(u^{p+1}) \subset \text{Im}(u^p)$. Il s'ensuit alors que la suite $(\text{Im}(u^p))_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
2. On pose $N = \bigcup_{p=0}^{\infty} \text{Ker}(u^p)$ et $I = \bigcap_{p=0}^{\infty} \text{Im}(u^p)$.
 (a) La suite $(\dim \text{Ker}(u^p))_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée (par $\dim(E)$) d'entiers naturels, donc elle est stationnaire à partir d'un certain rang. Aussi, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq n$, $\dim(\text{Ker}(u^p)) = \dim(\text{Ker}(u^n))$. De l'inclusion des ensembles, nous déduisons l'égalité $\forall p \geq n$, $\text{Ker}(u^p) = \text{Ker}(u^n)$. Il s'ensuit alors que $N = \text{Ker}(u^n)$.
 Par le théorème de la dimension, nous avons que $\dim(\text{Im}(u^p)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(u^p))$ d'où nous déduisons que la suite $(\dim \text{Im}(u^p))_{p \in \mathbb{N}}$ est aussi stationnaire. Des relations d'inclusion, nous déduisons $I = \text{Im}(u^n)$.
 (b) Montrons que N et I sont supplémentaires. Soit $x \in N \cap I$. Il existe $a \in E$ tel que $x = u^n(a)$ et $u^n(x) = 0$ ce qui implique que $u^{2n}(a) = 0$. Donc $a \in \text{Ker}(u^{2n})$. Or $\text{Ker}(u^{2n}) = \text{Ker}(u^n)$ donc $a^n = 0$ i.e. $x = 0$. Aussi, leur intersection est réduite à l'élément nul. Or, d'après le théorème du rang, nous savons que $\dim(N) + \dim(I) = \dim(E)$. De $I \cap N = \{0\}$, on déduit que I et N sont supplémentaires.
 Montrons qu'ils sont stables par u . Soit $x \in N = \text{Ker}(u^n)$. Alors $u^n(u(x)) = u \circ u^n(x) = u(0) = 0$ donc $u(x) \in N$. De même, si $x \in I = \text{Im}(u^n)$, il existe $y \in E$ tel que $x = u^n(y)$ et alors $u(x) = u \circ u^n(y) = u^n(u(y))$ d'où $u(x) \in I$.
Remarque: Une façon plus rapide de faire cela est de dire que u et u^n commutent.
 A présent, considérons $u|_N$. Nous avons $(u|_N)^n = 0$ et donc cet endomorphisme est nilpotent.
 $\text{Im} u^{p+1} = \text{Im}(u^n)$ donc $u(\text{Im}(u^n)) = \text{Im}(u^n)$ et donc $u|_I$ est surjective. De l'égalité des dimensions finies $\dim(\text{Im}(u^n)) = \dim(\text{Im}(u^{n+1}))$, on déduit que $u|_I$ est bijective.
3. Soit $E = F \oplus G$ avec F et G s.e.v. stables par u et tels que $u|_F$ est nilpotent et $u|_G$ est bijectif. Il existe donc p tel que $(u|_F)^p = 0$ et donc $F \subset \text{Ker}(u^p) \subset N$. $u|_G$ est bijective; il en va donc ainsi de $(u|_G)^n$. Or $G = \text{Im}(u|_G)^n \subset \text{Im}(u^n) = I$. Aussi, nous avons $\dim(F) \subset \dim(N)$ et $\dim(G) \subset \dim(I)$. Pourtant, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E) = \dim(N) + \dim(I)$ ce qui implique l'égalité des dimensions $\dim(F) = \dim(N)$ et $\dim(G) = \dim(I)$. Des inclusions entre ces ensembles, on déduit: $F = N$ et $G = I$.

Exercice 6: Localisation des valeurs propres (Théorème de Hadamard)

1. Soit donc $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ . Nous avons alors $MZ = \lambda Z$. Soit alors $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|z_i|$ soit maximal. Alors, pour cette ligne i , nous avons $\sum_{j=1}^n m_{i,j} z_j = \lambda z_i$, soit $(m_{i,i} - \lambda)z_i = \sum_{j \neq i} m_{i,j} z_j$. En passant au module et en utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons $|\lambda - m_{i,i}| \times |z_i| \leq \sum_{j \neq i} |m_{i,j}| \times |z_j|$. Enfin, comme Z est un vecteur propre, il est non nul, d'où $|z_i| \neq 0$ (rappelons que i est tel que $|z_i|$ est maximal). On en déduit que $|\lambda - m_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |m_{i,j}|$. Aussi, λ appartient bien au disque D_i de centre $m_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j \neq i} |m_{i,j}|$, d'où $\lambda \in D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$.
2. Puisque M est à diagonale dominante, on déduit de la question précédente que les disques D_i ne contiennent pas 0. Il s'ensuit que 0 n'est pas valeur propre de la matrice et donc elle est inversible (car il n'existe pas de $Z \neq 0$ tel que $AZ = 0$ donc $\text{Ker}(A) = \{0\}$).
3. *Autre démonstration*

- (a) Nous avons donc, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, en considérant l'égalité de la i -ième coordonnée dans l'égalité $MX = 0$, que $\sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j = 0$, ce qui implique que $m_{i,i} x_i = -\sum_{j \neq i} m_{i,j} x_j$. En considérant le module de cette égalité, on a alors:

$$|m_{i,i} x_i| = \left| \sum_{j \neq i} m_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |m_{i,j} x_j| \leq \max(|x_k|) \sum_{j \neq i} |m_{i,j}|$$

- (b) Soit i_0 l'indice réalisant le $\max(|x_k|)$. Comme X est un vecteur non nul, nécessairement sa coordonnée de module maximal est non nulle (sinon, toutes ses coordonnées seraient de modules nulles, ie. X serait le vecteur nul). En considérant l'égalité précédente pour i_0 et en divisant par $|m_{i_0,i_0}|$, nous obtenons $|m_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |m_{i_0,j}|$.
- (c) Cela contredit alors le fait que la matrice M soit à diagonale strictement dominante. Aussi, il n'existe pas de vecteur $X \neq 0$ tel que $MX = 0$, ie. 0 n'est pas valeur propre de M et donc M est inversible.