

Capes d'analyse 2007 (extrait)

Introduction

L'objet du problème est l'étude de la suite $(s_n)_{n \geq 1}$ définie par $\forall n \geq 1, s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Dans la première partie, on s'attache à démontrer par des méthodes élémentaires la convergence de cette suite par différentes méthodes. Dans les parties 2 et 3, on étudie la limite de cette suite par deux méthodes différentes.

Partie I: Convergence de la suite

Dans cette partie, le candidat utilisera librement les connaissances faisant partie du programme de Terminale S.

1. Première méthode

- (a) Démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$, nous avons la majoration $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
- (b) En déduire que la suite $(s_n)_{n \geq 1}$ est majorée.
- (c) En déduire que la suite $(s_n)_{n \geq 1}$ converge et donner un majorant de sa limite.

Dans toute la suite du problème, nous noterons S la limite de cette suite.

2. Deuxième méthode

On considère la suite $(t_n)_{n \geq 1}$ définie par $\forall n \geq 1, t_n = s_n + \frac{1}{n}$.

- (a) Démontrer que les suites $(s_n)_{n \geq 1}$ et $(t_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.
- (b) Donner, en le justifiant, un encadrement de S d'amplitude 10^{-1} .

3. Troisième méthode

Ecrire le texte d'un exercice de niveau Terminale S démontrant, par comparaison à une intégrale, la convergence de la suite $(s_n)_{n \geq 1}$.

Partie 2: Utilisation de polynômes

- 1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$, $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$.
Rappeler la formule permettant de calculer la somme $\sigma_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ des racines de P en fonction des coefficients a_k , $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.
- 2. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Démontrer l'égalité:

$$\sin((2p+1)\varphi) = \sum_{k=1}^p (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k}(\varphi) \sin^{2k+1}(\varphi)$$

où $\binom{2p+1}{2k+1}$ désigne le coefficient binomial pour $k \in \{0, \dots, p\}$.

- (b) En déduire que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et tout réel $\varphi \not\equiv 0[\pi]$:

$$\sin((2p+1)\varphi) = \sin^{2p+1}(\varphi) \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} (\cotan^2(\varphi))^{p-k}$$

où $\cotan(\varphi) = \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}$.

- 3. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par

$$P(X) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} X^{p-k}$$

(a) Pour tout entier naturel $k \in \{1, \dots, p\}$, on pose $\gamma_k = \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$.

Calculer $P(\gamma_k)$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p\}$.

(b) Vérifier que, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p\}$, le réel $\frac{k\pi}{2p+1}$ appartient à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. En déduire que le polynôme P possède p racines distinctes, que l'on déterminera.

(c) En déduire les égalités:

$$\sum_{k=1}^p \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}.$$

4. (a) Démontrer que, pour tout réel $\varphi \in]0; \frac{\pi}{2}[$, les encadrements

$$0 < \sin(\varphi) < \varphi < \tan(\varphi)$$

(b) En déduire que, pour tout entier $p \geq 1$, nous avons l'encadrement:

$$\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}$$

(c) Démontrer que $S = \frac{\pi^2}{6}$.

5. Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 1}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2}; \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)^2}; \quad w_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

sont convergentes, et déterminer les valeurs exactes de leurs limites, respectivement notées U , V et W .

Partie 3: Utilisation des intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt; \quad J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t) dt \quad \text{et} \quad K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$$

1. Calculer les intégrales I_0 et J_0 .

2. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$ (on pourra penser à l'intégration par parties).

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.

3. Soit $n \geq 1$.

(a) Démontrer la relation $I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$.

(b) En déduire que $K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}$.

(c) Démontrer la relation $\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = J_0 - K_n$.

4. (a) Démontrer que, pour tout réel $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, on a $x \leq \frac{\pi}{2} \sin(x)$.

(b) En déduire que, pour tout entier n , nous avons:

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)}, \quad \text{puis} \quad 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}$$

(c) Retrouver la valeur de S .