

Solution du Capes 2007, épreuve d'Analyse (parties 1 à 3)

Partie 1: Convergence de la suite

1. (a) Soit $k \geq 2$.

$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k^2 - k}$ et $k^2 - k \leq k^2$ d'où par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ nous avons :

$$\forall k \geq 2, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

- (b) Pour $n \geq 2$, on somme l'inégalité ci-dessus pour k allant de 2 à n :

$$\begin{aligned} s_n &\leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &\leq 1 + 1 - \frac{1}{n} \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

La suite $(s_n)_{n \geq 1}$ est donc majorée par 2 ($s_1 = 1$).

- (c) Pour $n \geq 1$, $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$ donc la suite $(s_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Elle est donc croissante et majorée par 2, on en déduit qu'elle converge vers $S \leq 2$.

2. (a) On a déjà montré que la suite (s_n) est croissante. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)^2} \end{aligned}$$

donc la suite (t_n) est décroissante.

De plus, puisque, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n - s_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n - s_n) = 0$.

On déduit de ces trois points que les suites (s_n) et (t_n) sont adjacentes.

- (b) D'après le théorème des suites adjacentes, les suites $(s_n)_{n \geq 1}$ et $(t_n)_{n \geq 1}$ convergent donc vers une limite commune S qui vérifie,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n \leq S \leq t_n$$

Cet encadrement est d'amplitude 10^{-1} si $n = 10$. A la calculatrice, on trouve :

$$1,5 \leq S \leq 1,6$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

- (a) Etudier la monotonie de la suite (s_n) .

- (b) Démontrer que la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est décroissante sur $[1 + \infty[$.

- (c) En déduire, pour $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}$$

Il faut ici mentionner la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^$ (cette fonction n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$)*

On reconnaît ici aisément une somme télescopique

*Il s'agit du **Théorème de convergence monotone**: Toute suite réelle croissante et majorée est convergente*

*Deux suites sont **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence converge vers 0*

Théorème des suites monotones Si (u_n) et (v_n) sont monotones, alors elles sont convergentes et ont même limite

Cet encadrement est un corollaire au théorème précédent

- (d) Démontrer par récurrence, pour
- $n \geq 1$
- ,

$$s_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^2}$$

Calculer cette intégrale.

- (e) Conclure que la suite
- (s_n)
- converge.

Partie 2: Utilisation de polynômes

- 1.
- $\sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- (
- $a_n \neq 0$
- car
- P
- est de degré
- n
-).

Il s'agit des fameuses relations coefficients-racines qu'il faut connaître...

2. (a) D'après la formule de Moivre,
- $\sin((2p+1)\varphi) = \operatorname{Im}(e^{i(2p+1)\varphi}) = \operatorname{Im}\left((e^{i\varphi})^{2p+1}\right) = \operatorname{Im}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{2p+1}$
- . On développe grâce à la formule du binôme de Newton et on sépare les termes d'indices pairs et impairs :

Il faut ici penser aux expressions complexes du sinus $\sin(\theta) = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{2i}(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

$$\sin((2p+1)\varphi) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{2k} \cos^{2p+1-2k}(\varphi) (i\sin\varphi)^{2k} + \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p+1-2k-1}(\varphi) (i\sin(\varphi))^{2k+1}\right)$$

or $i^{2k} = (-1)^k \in \mathbb{R}$ et $(i)^{2k+1} = (-1)^k i$ donc

$$\sin((2p+1)\varphi) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p+1-2k-1}(\varphi) \sin^{2k+1}(\varphi)$$

- (b) Pour
- $\varphi \notin 0[\pi]$
- ,
- $\sin\varphi \neq 0$
- donc on peut factoriser cette somme par
- $\sin^{2p+1}(\varphi) = \sin^{2k+1}(\varphi) \sin^{2p-2k}(\varphi)$
- pour obtenir

$$\sin((2p+1)\varphi) = \sin^{2p+1}(\varphi) \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} (\cotan^2\varphi)^{p-k}$$

3. (a) D'après la relation précédente,
- $P(\gamma_k) = \sin(k\pi) = 0$
- .

- (b) Si
- $k \in [1, p]$
- ,
- $\frac{k\pi}{2p+1} \in \left[\frac{\pi}{2p+1}; \frac{p\pi}{2p+1}\right]$
- . Comme
- $2p < 2p+1$
- , on a
- $\frac{k\pi}{2p+1} \in]0; \frac{\pi}{2}[$
- .

La fonction $t \mapsto \cotan^2 t$ est continue strictement décroissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et les $\frac{k\pi}{2p+1}$ sont deux à deux distincts donc les γ_k le sont aussi.

On a donc obtenu p racines distinctes pour le polynôme P . Celui ci est de degré p donc il n'en a pas d'autres.

Par conséquent, P a p racines distinctes qui sont les γ_k , $k \in [1; p]$.

Théorème fondamental de l'algèbre ou Théorème de d'Alembert-Gauss: Tout polynôme à coefficients complexes non constant de degré $n \geq 1$ admet exactement n racine dans $\mathbb{C}$.

- (c) D'après la formule rappelée à la question 1.,
- $\sum_{k=1}^p \gamma_k = -\frac{(-1)^1 \binom{2p+1}{2 \times 1 + 1}}{(-1)^0 \binom{2p+1}{1}} = \frac{(2p+1)(2p)(2p-1)}{6}$

d'où

$$\sum_{k=1}^p \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}$$

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\cotan^2\theta + 1 = \frac{1}{\sin^2\theta}$ donc $\sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{p(2p-1)}{3} + p = \frac{p(2p-1+3)}{3}$

d'où

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}$$

Ici, plutôt que d'étudier la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x) - x$, on préfère un raisonnement de nature géométrique (ie. sur la courbe représentative de la fonction sinus)

4. (a) Sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, la fonction $\sin$ est positive et strictement concave (sa dérivée seconde est $-\sin < 0$). De plus sa tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$ donc, pour $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $0 < \sin \varphi < \varphi$.

De même la fonction $\tan$ est strictement convexe (sa dérivée seconde est $\frac{2 \sin}{\cos^3}$) de même tangente en 0 donc $\varphi < \tan \varphi$.

- (b) Pour k entre 1 et p , on utilise l'inégalité précédente pour $\varphi = \frac{k\pi}{2p+1} \in]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) < \frac{k\pi}{2p+1} < \tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$$

Ces quantités étant toutes positives, par composition avec la fonction $t \mapsto 1/t^2$ qui est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, nous obtenons :

$$\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} < \frac{(2p+1)^2}{(k\pi)^2} < \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}$$

Pour $\varphi \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\frac{1}{\tan \varphi} = \cotan \varphi$ donc en sommant ces inégalités pour k allant de 1 à p et en utilisant les formules de **3.c**, on obtient :

$$\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}$$

- (c) On divise par $\frac{(2p+1)^2}{\pi^2}$:

$$\frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} < s_p < \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}$$

$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2p^2\pi^2}{12p^2} = \frac{\pi^2}{6}$ donc, d'après le théorème d'encadrement par des suites ayant même limite, nous en déduisons que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} s_p = \frac{\pi^2}{6} \text{ soit } S = \frac{\pi^2}{6}.$$

Initialement, les limites de ses suites sont indéterminées: il suffit de factoriser par la plus grande puissance aux numérateur et dénominateur pour lever celle-ci

5. Pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{4}s_n$ donc $(u_n)_{n \geq 1}$ converge, de limite $\frac{\pi^2}{24}$.

Pour $n \geq 1$, $v_n = s_{2n+1} - u_n$ donc $(v_n)_{n \geq 1}$ converge, de limite $\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$.

Pour $n \geq 1$, si $m_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $p_n = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, $w_n = v_{p_n} - u_{m_n}$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = +\infty$,

(w_n) converge, de limite $\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$.

Finalement

$$U = \frac{\pi^2}{24} \quad V = \frac{\pi^2}{8} \quad W = \frac{\pi^2}{12}$$

On utilise ici le théorème d'opérations algébriques sur les suites convergentes

Partie 3: Utilisation des intégrales de Wallis

1. $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $J_0 = \frac{\pi^3}{24}$.

2. (a) Dans $I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \cos t dt$, on effectue une intégration par parties en posant

Il faut bien savoir justifier une intégration par partie. Le fait que les fonctions u et v soient de classe C^1 n'est pas nécessaire, mais est une condition suffisante pour s'assurer de la convergence des intégrales considérées

$$u(t) = \cos^{2n+1} t,$$

$v'(t) = \cos t$ ($v(t) = \sin t$). u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= [\sin t \cos^{2n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^{2n} t dt \\ &= (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^{2n} t dt \\ &= (2n+1)(I_n - I_{n+1}) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $\mathcal{P}(n)$: " $I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$ " et raisonnons par récurrence sur l'entier naturel n .

Initialisation: Pour $n = 0$, $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Nous avons alors

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2^2 (n+1)^2 4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{4^{n+1} ((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Par récurrence, on peut alors conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

L'idée ici est d'effectuer deux intégrations par parties successives afin de se débarrasser du t^2 dans l'intégrande de J_n

3. (a) Dans I_n , on effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \cos^{2n} t$ et $v'(t) = 1$

$$\begin{aligned} I_n &= [t \cos^{2n} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n-1} t dt \\ &= 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n-1} t dt \end{aligned}$$

On effectue une nouvelle intégration par parties en posant $u(t) = \sin t \cos^{2n} t$ et $v'(t) = t$:

$$\begin{aligned} I_n &= 2n \left[\frac{t^2}{2} \sin t \cos^{2n} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 (\cos^{2n} t - (2n-1) \sin^2 t) \cos^{2n-2} t dt \\ &= -n J_n + n(2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 (1 - \cos^2 t) \cos^{2n-2} t dt \\ &= -n J_n + n(2n-1) J_{n-1} - n(2n-1) J_n \end{aligned}$$

d'où

$$I_n = n(2n-1) J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

(b) On multiplie cette égalité par $\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$. Avec la question 1.b),

$$\frac{\pi}{2} = 4n^2 n(2n-1) \frac{4^{n-1} (n-1)!^2}{2n(2n-1)(2n-2)!} J_{n-1} - 2n^2 \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$$

En divisant par $2n^2$, on obtient

$$K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}$$

- (c) Pour k entier entre 1 et n , $K_{k-1} - K_k = \frac{\pi}{4k^2}$. En sommant ces égalités de 1 à n nous obtenons

$$\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = K_0 - K_n$$

Or $K_0 = J_0$ donc

$$\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = K_0 - K_n$$

4. (a) La fonction $\sin$ est concave sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ donc sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses cordes, en particulier celle reliant $(0, 0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$ qui a pour équation $y = \frac{2}{\pi}x$. On a donc :

$$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], \quad x \leq \frac{\pi}{2} \sin x$$

- (b) On élève cette inégalité au carré (tout est positif) et on multiplie par $\cos^{2n} t \geq 0$:

$$\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}], \quad 0 \leq t^2 \cos^{2n} t \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2 t \cos^{2n} t$$

On intègre cette inégalité entre 0 et $\frac{\pi}{2}$:

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^{2n} t dt$$

Dans cette dernière intégrale, on effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \sin t$ et $v'(t) = \sin t \cos^{2n} t$ ($v(t) = \frac{-1}{2n+1} \cos^{2n+1} t$) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^{2n} t dt = \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2} t dt = \frac{1}{2n+1} I_{n+1}$$

Avec la relation de récurrence 2.a),

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{2n+1} \frac{2n+1}{2n+2} I_n$$

d'où

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}$$

On multiplie alors par $\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} > 0$ grâce à 2.b):

$$0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}$$

- c) Par encadrement, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0$.

La question 3.c) donne alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{4}{\pi} J_0$. Or $J_0 = \frac{\pi^3}{24}$ donc on retrouve $s = \frac{\pi^2}{6}$.

La encore, on préfère un raisonnement géométrique plutôt que l'étude d'une fonction auxiliaire. Ces inégalités sont classiques.

*La propriété ici utilisée est la **croissance de l'intégrale**: Si u et v sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ avec $\forall x \in [a; b], u(x) \leq v(x)$, alors $\int_a^b u(t) dt \leq \int_a^b v(t) dt$*