

Solution: Série harmonique et la série harmonique alternée

Partie 1: Utilisation d'une intégrale

1. Nous avons $\int_0^1 t^p dt = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$.
2. Nous avons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^k dt$. Nous pouvons (toujours) intervertir les symboles somme finie et intégrale, d'où:

$$S_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k dt.$$

On reconnaît alors la somme des premiers termes d'une série géométrique, de premier terme 1 et de raison $-t$. Aussi, nous en déduisons que $\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$. Il s'ensuit donc que $S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$.

3. Nous avons déjà que $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$. De la précédente égalité, nous en déduisons alors que:

$$|S_n - \ln(2)| = \left| \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

4. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, il en résulte, par le théorème de comparaison des suites ayant même limite, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |S_n - \ln(2)| = 0$ ce qui démontre que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et a pour limite $\ln(2)$.

Partie 2: Utilisation de la série harmonique

1. Nous avons $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [k, k+1]$, par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$: $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$. En intégrant cette équation pour tout $t \in [k, k+1]$, nous en déduisons $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt$ ce qui implique donc que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$. En sommant ces inégalités pour k variant de 1 à n , nous en déduisons que:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Il s'ensuit que: $H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n$, soit encore (cette relation étant vraie pour tout n): $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.

2. (a) $T_{n+1} - T_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
Pour étudier le signe de cette quantité, introduisons la fonction $h: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit alors que $h'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-x+(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}$. Aussi, la fonction h' est-elle strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1 - \ln(2) > 0$. Il s'ensuit donc que la fonction h est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc $T_{n+1} - T_n \geq 0$. La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc strictement croissante.
- (b) Aussi, la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, et est majorée par 1 (cf. question précédente), d'où cette suite est convergente. Sa limite, γ , vérifie $0 \leq \gamma \leq 1$.

3. Nous avons $\varepsilon_n = T_n - \gamma$. Par le théorème d'opérations algébriques sur les suites convergentes, nous en déduisons que la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, et de limite nulle.
4. Raisonnons par récurrence sur l'entier naturel non nul n .
 Initialisation: Pour $n = 1$, nous avons $\sum_{k=1}^2 \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$. De même, $\sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
 On a donc bien l'égalité souhaitée.
 Hérédité: Supposons donc que l'égalité proposée soit vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$ et démontrons-la au rang $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

Par hypothèse de récurrence, nous déduisons:

$$\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k}.$$

Nous en déduisons donc la relation de récurrence au rang $n + 1$. Par le théorème de la récurrence, nous en déduisons que pour tout entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité proposée est vraie.

5. Nous avons $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n = \varepsilon_{2n} + \ln(2n) + \gamma - (\varepsilon_n + \ln(n) + \gamma) = \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n + \ln(2)$.
6. Par le théorème d'opérations algébriques de suites convergentes, nous en déduisons que $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ tend vers $\ln(2)$. Il s'ensuit donc par la question 4 que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.

Partie 3: Utilisation de suites adjacentes

1. Nous avons $u_{n+1} - u_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0$ d'où la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. De même, $v_{n+1} - v_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0$ d'où la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Enfin, $u_n - v_n = S_{2n} - S_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$ et donc les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont des suites adjacentes.
2. Les fonctions f et g sont dérivables par le théorème d'opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Nous avons alors: $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} x^{k-1}$. Nous reconnaissons alors la somme des premiers termes d'une série géométrique, de premier terme 1 et de raison $-x$, d'où $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1-(-x)^{2n}}{1+x} = \frac{x^{2n}}{1+x} > 0$ d'où la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0) = 0$, nous en déduisons que f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
 On procède de même avec la fonction g : elle est aussi strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Les fonctions f et g étant strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$, nous en déduisons l'inégalité proposé:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \leq \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}.$$

4. On pose alors $x = 1$: nous obtenons $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \ln(2) \leq v_n$. Or, les suites (u_n) et (v_n) étant adjacentes, elles sont convergentes et de même limite, d'où en passant à la limite dans la relation précédente, nous déduisons que cette limite commune est $\ln(2)$.
5. On peut remarquer que (u_n) et (v_n) sont des suites extraites de (S_n) . Aussi, comme les ensembles d'indices forment une partition de $\mathbb{N}^*$ (en pair et impair), la convergence des suites (u_n) et (v_n) vers $\ln(2)$ implique la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers $\ln(2)$.