

Formule de Stirling et intégrale de Gauss: Solution

Partie I.

$$1. I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}(t) \cos^2(t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}(t)(1 - \sin^2(t)) dt = I_{n-1} - \int_0^{\pi/2} (\cos^{n-1}(t) \sin(t)) \sin(t) dt.$$

Nous pouvons alors utiliser une intégration par partie: Les fonctions $u'(t) = \sin(t) \cos^{n-1}(t)$ et $v(t) = \sin(t)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$, donc:

$$I_{n+1} - I_{n-1} = - \int_0^{\pi/2} \frac{f'(t)}{n} g(t) dt = -[fg]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} f(t) g'(t) dt = -\frac{1}{n} I_{n+1}$$

Nous en déduisons que $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$.

Puisque $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, nous en déduisons les formules sur I_{2p} et I_{2p+1} .

$$2. I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)(\cos(t) - 1) dt \leq 0 \text{ donc la suite } (I_n) \text{ est décroissante. Puisque tous ces termes sont positifs, nous en déduisons alors qu'elle converge.}$$

$$3. \text{ Nous avons vu en question 1 que } I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}. \text{ Ainsi, en supposant que la quantité } (k+1)I_k I_{k+1} \text{ est constante pour un certain rang } n, \text{ nous avons: } (n+1)I_n I_{n+1} = nI_n I_{n-1} \text{ et donc la quantité est constante au rang } n+1.$$

Pour calculer la valeur de cette constante, il suffit de prendre $n = 0$, on a alors: $I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$.

$$4. \text{ Par 3., la suite } (I_n) \text{ ne s'annule jamais. Aussi pouvons-nous considérer le quotient } \frac{I_n}{I_{n-1}}. \text{ En utilisant la relation de récurrence, nous déduisons que } \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \text{ Or, puisque } (I_n) \text{ est décroissante, nous avons: } I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}, \text{ soit par positivité de } I_{n-1}: \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1.$$

Par le théorème des gendarmes, nous en déduisons que $\frac{I_n}{I_{n-1}} \rightarrow 1$. Cela implique que $I_{n+1} \sim I_n$ en $+\infty$.

Or, nous avons $\frac{\pi}{2} = (n+1)I_n I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} nI_n^2$ d'où l'on obtient l'équivalent souhaité.

$$5. (a) \ln(u_n) = \sum_k = 1^n \ln(k) - (n + \frac{1}{2}) \ln(n) + n.$$

$$(b) v_{n+1} - v_n = \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = 1 - (n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n}).$$

Nous savons que $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$ (avec h dans un voisinage de 0), ou encore $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + O(h^3)$.

Ainsi, nous obtenons:

$$v_{n+1} - v_n = 1 - (n + \frac{1}{2}) (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^3})) = 1 - \frac{n + 1/2}{n} + \frac{n + 1/2}{2n^2} + O(\frac{1}{n^2}) = 1 - 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + O(\frac{1}{n^2})$$

Ainsi, nous obtenons $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4n^2} + O(\frac{1}{n^2})$.

$$(c) \text{ Par critère de comparaison, la série } \sum (v_{n+1} - v_n) \text{ converge, d'où la convergence de la suite } (v_n).$$

$$(d) \text{ Par continuité de la fonction } \exp, \text{ nous déduisons que } (u_n) \text{ est une suite convergente. Soit } \ell \text{ sa limite.}$$

$$6. \text{ Par 1. } I_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \text{ et par 4. } I_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}}. \text{ Ainsi, en remplaçant dans } I_{2p} \text{ les } (2p)! \text{ et } p! \text{ par leur équivalent obtenu à la question précédente, nous obtenons:}$$

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{2^{2p}(2p)!}{(p!)^2} = \frac{\ell \left(\frac{2p}{e}\right)^{2p} \sqrt{2p}}{2^{2p} (\ell(p/e)^p \sqrt{p})^2}.$$

Après quelques simplifications, nous obtenons:

$$\ell \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$$

Puisque ℓ est une constante, en passant à la limite, nous obtenons $\ell = \sqrt{2\pi}$. En remplaçant ℓ par cette valeur dans la formule 5.d. nous obtenons la formule de Stirling $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Partie II.

1. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est une fonction continue et positive sur $[0, +\infty[$, donc la fonction $F : X \mapsto \int_0^X e^{-t^2} dt$ est croissante.

Pour tout $t \geq 1$, nous avons que $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ d'où par croissance de l'intégrale, nous avons $\int_1^X e^{-t^2} dt \leq \int_1^X e^{-t} dt = 1 - e^{-X}$. On en déduit alors que la fonction F est majorée sur $\mathbb{R}_+$, d'où l'intégrale est convergente.

2. La fonction h est dérivable sur $] -1, +\infty[$ par le théorème d'opérations algébriques sur les fonctions dérivables, et l'on a: $h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$. Il s'ensuit donc que h' est négative sur $] -1, 0[$ et positive sur $[0, +\infty[$, d'où les variations de h s'en déduisent. Il s'ensuit alors que $\forall x \in] -1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

3. (a) Par positivité de la fonction intégrée, on déduit que la fonction $X \mapsto \int_0^X \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}$ est croissante. Par changement de variable, nous obtenons:

$$\int_0^X \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} = \int_0^{\text{Arctan} \frac{X}{\sqrt{n}}} \frac{dt}{(1+\tan^2 t)^{n-1}}.$$

La fonction intégrée dans l'intégrale de droite est toujours inférieure à 1: on intègre sur un chemin de longueur inférieur à $\frac{\pi}{2}$ d'où nous déduisons l'inégalité $\int_0^X \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} \leq \frac{\pi}{2}$.

Il s'ensuit donc que l'intégrale c_n est convergente.

- (b) $\forall x \in [0, \sqrt{n}]$, nous avons

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{n \ln(1-x^2/n)} \leq e^{-x^2} \quad \text{car} \quad -\frac{x^2}{n} \in]-1, 0] \quad \text{donc} \quad \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leq -\frac{x^2}{n}.$$

Il s'ensuit alors que $b_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$.

$\forall x \in [0, \sqrt{n}]$, nous avons

$$\left(1 + \frac{x^2}{-n}\right)^n = e^{-n \ln(1+x^2/n)} \geq e^{-x^2} \quad \text{car} \quad -\frac{x^2}{n} \geq 0 \quad \text{donc} \quad \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right) \leq \frac{x^2}{n}.$$

Il s'ensuit alors que $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$.

- (c) Pour exprimer b_n , on utilise le changement de variable $x = \sqrt{n} \sin(t)$.

$$b_n = \int_0^{\pi/2} \sqrt{n}(1 - \sin^2(t)) dt \sqrt{n} I_{2n+1}.$$

Pour réexprimer c_n , on utilise le changement de variable $x = \sqrt{n} \tan(t)$. On a $c_n = \int_0^{\pi/2} \sqrt{n}(1 + \tan^2 t) \frac{dt}{(1 + \tan^2(t))^n} = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1 + \tan^2 t)^{n-1}} = \sqrt{n} I_{2n-2}$ (on utilise la formule $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$).

4. Nous avons $b_n = \sqrt{n} I_{2n+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $c_n = \sqrt{n} I_{2n-2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. L'encadrement précédent implique par passage à la limite:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

La valeur de l'intégrale de Gauss s'en déduit donc.