

Leçon 42. Limite d'une fonction réelle de variable réelle

Déclic TS

Pré-requis: Notion de fonction (ensemble de définition), nombre dérivé et fonction dérivée,

Cadre: On désigne par f définie sur un intervalle non vide I , et on désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

I. Limite d'une fonction à l'infini

Définition 1 (*Limite finie à l'infini*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ et ℓ un réel. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.

Définition 2 (*Asymptote horizontale*)

Lorsque f admet ℓ pour limite en $+\infty$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Définition 3 (*Limite infinie à l'infini*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$. On dit que f a $+\infty$ pour limite en $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand. On écrit alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

II. Limite d'une fonction en un réel a

Définition 4 (*Limite infinie en un réel a*)

Soit f une fonction définie sur un ouvert dont le réel a est une borne. On dit que f a pour limite $+\infty$ en a lorsque tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a . On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Définition 5 (*Limite infinie en un réel a à droite*)

On dit que f admet pour limite $+\infty$ en a à droite lorsque tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a , x restant strictement supérieur à a . On écrit alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

Définition 6 (*Asymptote verticale*)

Lorsque f a pour limite $+\infty$ en a (à droite en a ou à gauche en a) on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Définition 7 (*Continuité*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que la fonction f est **continue en un réel a** de I si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. On dit que la fonction f est **continue sur I** si f est continue en tout réel a de I .

Théorème 1 (*(admis)*)

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I .

Conséquences: Les fonctions de référence (affines, carrés, racine carrée, inverse, valeur absolue, cosinus, sinus) sont continues en tout intervalle où elles sont définies.

Les fonctions construites par somme, produit ou composition à partir de ses fonctions sont continues.

Théorème 2 (*Théorème des valeurs intermédiaires (admis)*)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Alors f atteint son minimum m et son maximum M , et pour tout réel k compris entre m et M , il existe (au moins) un réel c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Théorème 3

Si la fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre

$f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

1. Justifier l'existence d'un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.
2. On suppose ici que f est strictement croissante sur $[a; b]$. Montrer que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a; b]$.
3. Conclure.

III. Détermination de limites

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert non vide I et a une borne de I .

Somme de deux fonctions

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	???

Produit de deux fonctions

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	???

Quotient de deux fonctions

On suppose que g ne s'annule pas sur I .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	ℓ	ℓ	0	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0 et $g(x) > 0$	0 et $g(x) < 0$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	???	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$ (selon signe de ℓ')	???

Définition 8 (Composée)

Soient u et v deux fonctions définies sur deux ensembles I et J tels que l'image de I par u est contenue dans J : $u(I) \subset J$.
Alors la fonction obtenue en appliquant successivement u puis v s'appelle la composée de u par v , et est notée $v \circ u$. On a $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

Théorème 4 ((admis) Composition des limites)

Soient a, b et λ est réels ou $\pm\infty$. Si on a $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} v(y) = \lambda$, alors $\lim_{x \rightarrow a} v \circ u(x) = \lambda$.

Théorème 5 (Limites infinies et comparaisons)

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout $x > a$, $f(x) \leq g(x)$.
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème 6 (Théorème des gendarmes (admis))

On considère trois fonctions f, g et h , définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$. Alors f admet pour limite ℓ en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

III. Applications

Exercice 41 page 71

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.

1. Justifier que f ne peut pas admettre de limite infinie en $+\infty$.
2. Calculer, pour tout entier k , les images par f de $x_k = k\pi$ et $y_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
3. Justifier que f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 49 page 73

1. (a) Démontrer que la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ n'admet pas de limite en 0.
(b) Admet-elle une limite en 0 sur l'intervalle $] -\infty; 0[$? et sur l'intervalle $]0; +\infty[$?
2. (a) La fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ admet-elle une limite en 0 ?
(b) Admet-elle une limite en 0 sur l'intervalle $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$?

Exercice 72 page 97, Odysée TS

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.
2. Calculer les limites en l'infini.

Exercice 73 page 75

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{E(x)}{x}$, où E désigne la fonction partie entière.

1. Démontrer que, pour tout réel x , $x - 1 \leq E(x) \leq x$.
2. En déduire la limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 119 page 85

1. (a) Démontrer que tout polynôme de degré 3 s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
(b) Démontrer que tout polynôme de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
2. Tout polynôme de degré n pair s'annule-t-il obligatoirement au moins une fois sur $\mathbb{R}$?

Exercice 139 page 89

Pour aller d'une ville A à une ville B , un véhicule roule en moyenne à 80 km.h^{-1} . Puis il effectue le trajet retour à la vitesse moyenne de $x \text{ km.h}^{-1}$.

1. justifier que pour tout réel $x > 0$, $\frac{1}{80} + \frac{1}{x} = \frac{2}{v(x)}$. En déduire l'expression de $v(x)$ en fonction de x .
2. Déterminer la limite de v en 0 (à droite) et en $+\infty$. Interpréter physiquement les résultats.
3. Dresser le tableau de variations complet de v sur l'intervalle $]0; +\infty[$.