Anneaux et idéaux

Exercice 1: Anneaux des entiers de Gauss

On désigne i le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$ et par $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ des complexes s'écrivant $a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau (unitaire) de $(\mathbb{C}, +, \times)$ contenant à la fois $\mathbb{Z}$ et i.
2. On désigne par $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$ l'application définie par $N(a + ib) = a^2 + b^2$.
3. Montrer que N est une application multiplicative, c'est-à-dire que si $z, z' \in \mathbb{Z}[i]^2$, alors $N(z \times z') = N(z) \times N(z')$.
4. Calculer $N(1)$ et en déduire quels sont les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 2: Anneau des décimaux

On désigne par $\mathbb{D}$ l'ensemble des décimaux. Justifier que $\mathbb{D}$ est un anneau commutatif intègre et précisez quels sont ses éléments inversibles.

Exercice 3: **Idéaux de l'anneau produit** $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$

On rappelque les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}$. On considère l'anneau produit $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \times)$. Le but est ici de déterminer quels sont ses idéaux: dans la suite, on désigne par $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

1. Soit $\varphi_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'application définie par $\varphi_1((x, y)) = x$. L'application φ_1 est appelée *première projection canonique de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*.
   Montrer que φ_1 est un morphisme d'anneaux.
2. Montrer que φ_1 est surjectif, et en déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi_1(\mathcal{I}) = m\mathbb{Z}$.
3. Montrer alors que $(m, 0) \in \mathcal{I}$.
4. On désigne par $\varphi_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la seconde projection canonique définie par $\varphi_2((x, y)) = y$.
   Montrer de même qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $(0, p) \in \mathcal{I}$.
5. En déduire que $\mathcal{I} = m\mathbb{Z} \times p\mathbb{Z}$ (i.e. les idéaux de l'anneau produit $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sont les produits des idéaux de $\mathbb{Z}$).

Exercice 4: Annulateur d'un ensemble

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et M une partie de A. On désigne par $Ann(M)$ l'ensemble, appelé *annulateur de M* des éléments x de A vérifiant: $\forall m \in M,\ x \times m = m \times x = 0_A$.
Montrer que $Ann(M)$ est un idéal de $(A, +, \times)$.

Exercice 5: Anneau fini intègre

Soit $(A, +, \times)$ un anneau fini intègre.

1. Soit $a \in A \setminus \{0\}$. On désigne par $h_a : A \to A$ l'application $h_a(x) = a \times x$.
   Montrer que h_a est injective.
2. En déduire que a est inversible.
3. Que peut-on dire de tout anneau fini intègre ?

Exercice 6: Nilradical

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Un élément $a \in A$ est dit *nilpotent* s'il existe un entier naturel k tel que $a^k = 0_A$.
Montrer que les éléments nilpotents d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ est un idéal.

Exercice 7: Radical d'un idéal

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et $\mathcal{I}$ un idéal de A. On appel *radical* de l'idéal $\mathcal{I}$ l'ensemble des éléments $x \in A$ tels qu'il existe une puissance $n \in \mathbb{N}$ tels que $a^n \in \mathcal{I}$. On note $\sqrt{I}$ le radical de l'idéal $\mathcal{I}$.

1. Montrer que $\sqrt{\mathcal{I}}$ est un idéal de A et qu'il contient $\mathcal{I}$.
2. Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux idéaux de A, tels que $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$. Montrer que $\sqrt{\mathcal{I}} \subset \sqrt{\mathcal{J}}$.
   En déduire que $\sqrt{\sqrt{\mathcal{I}}} = \sqrt{\mathcal{I}}$.
3. Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux idéaux de A.
   Montrer que $\sqrt{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
4. Déterminer le radical d'un idéal de $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

Solution: Anneaux et idéaux

Solution Exercice 1: Anneaux des entiers de Gauss

1. Montrons que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$. Déjà, $0=0+0i\in\mathbb{Z}[i]$ d'où cet ensemble est non vide. Ensuite, si $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ sont des éléments de $\mathbb{Z}[i]$ (c'est-à-dire avec $(a,a',b,b')\in\mathbb{Z}^4$) alors $z+z'=(a+a')=i(b+b')\in\mathbb{Z}[i]$, d'où $\mathbb{Z}[i]$ est stable par la loi somme.
Enfin, si $z=a+ib\in\mathbb{Z}[i]$ alors $-z=(-a)+i(-b)\in\mathbb{Z}[i]$ d'où il est stable par passage à l'opposé. Il s'ensuit donc que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}$.
Reste à montrer qu'il est stable par produit: si $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$, alors $z\times z'=\underbrace{aa'-bb'}_{\in\mathbb{Z}}+i\underbrace{(ab'+ba')}_{\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{Z}[i]$. Il s'ensuit donc que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C},+,\times)$. Il contient $\mathbb{Z}$ (donc il est unitaire car $1\in\mathbb{Z}$) et $i=0+1\times i$.
2. Soient $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ deux éléments de $\mathbb{Z}[i]$. Alors $zz'=aa'-bb'+i(ab'+a'b)$ d'où $N(zz')=(aa'-bb')^2+(ab'+a'b)^2$. De part ailleurs, nous avons: $N(z)\times N(z')=(a^2+b^2)\times(a'^2+b'^2)=a^2a'^2+ab'^2+b^2a'^2+b^2b'^2$. En comparant ces deux expressions, nous constatons qu'elles sont égales, d'où $\forall(z,z')\in\mathbb{Z}[i]^2$, nous avons $N(zz')=N(z)N(z')$.
3. Nous avons évidemment $N(1)=1$. Si $z\in\mathbb{Z}[i]$ est inversible, alors il existe $z^{-1}\in\mathbb{Z}[i]$. Aussi, $N(z\times z^{-1})=1=N(z)\times N(z^{-1})$. Aussi, $N(z)$ est-il un inversible de $\mathbb{Z}$ (car N est à valeurs dans $\mathbb{Z}$). Or, les seuls inversibles de $\mathbb{Z}$ sont 1 et -1: il s'ensuit que si $z=a+ib$ est inversible, on doit avoir $a^2+b^2=\pm1$. Comme a et b sont eux-même des entiers, il s'ensuit que l'on a 4 solutions: $(1,0),(-1;0);(0,1);(0,-1)$. On a donc $\mathbb{Z}[i]^\times=\{1,-1,i,-i\}$.

Exercice 2: Anneau des décimaux

1. On plonge déjà $\mathbb{D}$ dans l'anneau des réels $(\mathbb{R},+,\times)$ (ou $(\mathbb{Q},+,\times)$). Il reste à montrer que c'est un sous-anneau de $(\mathbb{R},+\times)$.
   Déjà, il est évidement que $(\mathbb{D},+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.
   De plus, on vérifie que le produit de deux décimaux est un nombre décimal, d'où $(\mathbb{D},+,\times)$ est un sous-anneaux de $(\mathbb{R},+,\times)$.
2. Remarquons déjà que $\mathbb{D}$ n'est pas un corps, car par exemple $3\in\mathbb{D}$ mais son inverse, $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal, d'où 3 n'est pas inversible dans $\mathbb{D}$.
   Nous allons procéder par analyse-synthèse:
   Si $d\in\mathbb{D}$ est inversible, alors $d=\frac{a}{10^k}$ et $\frac{1}{d}=\frac{10^k}{a}$. Il s'ensuit nécessairement que a est le produit d'une puissance de 2 avec une puissance de 5. On en déduit donc la condition nécessaire: $\frac{a}{10^k}$ est inversible dans $\mathbb{D}$ si et seulement si $a=2^\alpha5^\beta$.
   Phase de synthèse: On suppose que $d=\frac{2^\alpha5^\beta}{10^k}$. Alors $\frac{1}{d}$ peut être écrite comme une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10. Il s'ensuit donc que $\mathbb{D}^\times=\{\frac{2^\alpha5^\beta}{10^k},(\alpha,\beta,k)\in\mathbb{N}^3\}$.

Exercice 3: Idéaux de l'anneau produit $\mathbb{Z}^2$

1. Il est aisé de montrer que $\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{Z}^2$, nous avons: $\varphi_1((x,y)+(x',y'))=\varphi_1((x+x',y+y'))=x+x'=\varphi_1((x,y))+\varphi_1((x',y'))$. De même pour le produit: $\varphi_1((x,y)\times(x',y'))=\varphi_1((x\times x',y\times y'))=x\times x'=\varphi_1((x,y))\times\varphi_1((x',y'))$. Enfin, nous avons bien que l'élément neutre de $\mathbb{Z}^2$ muni de la structure d'anneau produit est $(1,1)$, d'où $\varphi_1((1,1))=1$. Aussi, φ_1 est-il bien un morphisme d'anneaux, de $\mathbb{Z}^2$ muni de la structure d'anneaux produit sur $(\mathbb{Z},+,\times)$.
2. Soit $m\in\mathbb{Z}$. Nous avonsa $\varphi_1((m,1))=m$, d'où φ_1 est surjectif. Aussi, d'après le cours, nous en déduisons que l'immage de l'idéal $\mathcal{I}$ de l'anneau produit $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$. Aussi, il existe $m\in\mathbb{Z}$ tel que $\varphi_1(\mathcal{I})=m\mathbb{Z}$ (puisque les idéaux de $(\mathbb{Z},+,\times)$ sont les $m\mathbb{Z}$ avec $m\in\mathbb{N}$).
3. Puisque φ_1 est surjectif, il existe $(m,a)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tel que $\varphi_1((m,a))=m$. Aussi, $(m,a)\in\mathcal{I}$. On considère alors $(1,0)\in\mathbb{Z}^2$: le produit $(m,a)\times(1,0)=(m,0)$ est un élément de l'idéal $\mathcal{I}$, d'où $(m,0)\in\mathcal{I}$.
4. Par le même raisonnement, on a $(0,p)\in\mathcal{I}$.
5. Du fait que $(m,0)\in\mathcal{I}$ et $(0,p)\in\mathcal{I}$, nous en déduisons que $m\mathbb{Z}\times p\mathbb{Z}\subset\mathcal{I}$ (il suffit de multiplier ces éléments par (x,y) et $(x',y')\in\mathbb{Z}^2$ pour le voir). Or, $\mathcal{I}\subset\varphi_1(\mathcal{I})\times\varphi_2(\mathcal{I})$ puisque φ_1 et φ_2 sont les projections canoniques. Il s'ensuit que $\mathcal{I}=m\mathbb{Z}\times p\mathbb{Z}$.

Exercice 4: Annulateur d'un ensemble

Soit donc M une partie de A. Montrons déjà que $Ann(M)$ est un sous-groupe de $(A,+)$.
$Ann(M)$ est non vide puisque $O_A\in Ann(M)$ (en effet, 0_A est absorbant). Si x et y sont deux éléments de $Ann(M)$, nous en déduisons que $x+y$ vérifie: $\forall m\in M$, $(x+y)\times m=x\times m+y\times m=0_A+0_A=0_A$. Enfin, si $x\in Ann(M)$, nous avons $\forall m\in M$, $(-x)\times m=-(x\times m)=-0_A=0_A$. Aussi, $Ann(M)$ est bien un sous-groupe de $(A,+)$. Montrons à présent que c'est un idéal de A: Soient $x\in Ann(M)$ et $a\in A$. Alors, $\forall m\in M$, nous avons par commutativité de l'anneau: $(ax)\times m=a(x\times m)=a\times0_A=0_A$ d'om $ax\in Ann(M)$. Il s'ensuit que $Ann(M)$ est bien un idéal de $(A,+,\times)$.

Exercice 5: Anneau fini intègre

1. Supposons que $h_a(x)=h_a(y)$. Alors $a\times x=a\times y$. En multipliant à gauche par a^{-1}, nous obtenons que $x=y$ et donc l'application h_a est injective.
2. Comme $h_a:A\to A$ et que A est de cardinal fini, nous en déduisons que h_a est une bijection. Aussi, il existe $x\in A$ tel que $h_a(x)=1_A$ et par suite $a\times x=1_A$. Aussi, a est inversible.

3. Tout anneau fini intègre est un corps.

Exercice 6: Nilradical

On vérifie déjà que l'ensemble des éléments idempotents est un sous-groupe de $(A,+)$.
Puis, on montre que si x est nilpotent, alors $\forall a \in A$, ax l'est aussi (cela résulte de la commutativité de l'anneau $(A,+,\times)$).

Exercice 7: Radical d'un idéal

1. Montrons déjà que $\sqrt{\mathcal{I}}$ est un sous-groupe de $(A,+)$.
   $0_A \in \sqrt{\mathcal{I}}$ d'où $\sqrt{\mathcal{I}}$ est non vide.
   Soient x et y deux éléments appartenant à $\sqrt{\mathcal{I}}$. Aussi, il existe n et m deux entiers tels que $x^n \in \mathcal{I}$ et $y^m \in \mathcal{I}$. Alors $(x+y)^{n+m} = \sum_{j=0}^{n+m} \binom{n+m}{j} x^j y^{n+m-j}$. Dans cette dernière somme, différentions les j compris entre 0 et $n-1$ de ceux compris entre n et $n+m$. Si $0 \leqslant j \leqslant n-1$, alors $n+m-j > m$ et donc $y^{n+m-j} \in \mathcal{I}$ (la puissance est supérieur à m). Si $n \leqslant j \leqslant n+m$, alors $x^j \in \mathcal{I}$ (car $x^j = x^n \times x^{j-n} \in \mathcal{I}$ puisque $\mathcal{I}$ est un idéal de $(A,+,\times)$). Il s'ensuit donc que $x+y$ est un élément de $\mathcal{I}$.
   Enfin, si $x \in \sqrt{\mathcal{I}}$, alors il est évidement que $-x \in \sqrt{\mathcal{I}}$, d'où $\sqrt{\mathcal{I}}$ est un sous-groupe de A.
   Reste à montrer que $\sqrt{\mathcal{I}}$ est un idéal de $(A,+,\times)$. Comme A est commutatif, si $x \in \sqrt{\mathcal{I}}$, alors pour tout $y \in A$, nous avons $(xy)^n = x^n y^n$. Donc, pour l'entier n tel que $x^n \in \sqrt{\mathcal{I}}$, nous en déduisons que $xy \in \sqrt{\mathcal{I}}$ d'où $\sqrt{\mathcal{I}}$ est un idéal de $(A,+,\times)$.
   Tout élément x de $\mathcal{I}$ vérifie $x^1 \in \mathcal{I}$ d'où l'inclusion $\mathcal{I} \subset \sqrt{\mathcal{I}}$.
2. Si $x \in \sqrt{\mathcal{I}}$, alors il existe un entier naturel n tel que $x^n \in \mathcal{I}$. De l'inclusion $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$, nous déduisons que $x^n \in \mathcal{J}$ d'où $x \in \sqrt{\mathcal{J}}$ et donc $\sqrt{\mathcal{I}} \subset \sqrt{\mathcal{J}}$.
   Comme $\mathcal{I} \subset \sqrt{\mathcal{I}}$, nous déduisons que $\sqrt{\mathcal{I}} \subset \sqrt{\sqrt{\mathcal{I}}}$. Reste donc à montrer l'inclusion réciproque: si $x \in \sqrt{\sqrt{\mathcal{I}}}$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \in \sqrt{\mathcal{I}}$ d'om il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $(x^n)^m \in \mathcal{I}$ d'où $x^{n\times m} \in \mathcal{I}$ d'où l'inclusion $\sqrt{\sqrt{\mathcal{I}}} \subset \sqrt{\mathcal{I}}$. On en déduit donc l'égalité de ces deux ensembles par double inclusion.
3. Des inclusions $\mathcal{I}\cap\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ et $\mathcal{I}\cap\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$, nous déduisons que $\sqrt{\mathcal{I}\cap\mathcal{J}} \subset \sqrt{\mathcal{I}}$ et $\sqrt{\mathcal{I}\cap\mathcal{J}} \subset \sqrt{\mathcal{J}}$, donc $\sqrt{\mathcal{I}\cap\mathcal{J}} \subset \sqrt{\mathcal{I}} \cap \sqrt{\mathcal{J}}$.
   Reste à montrer l'inclusion réciproque: soit donc $x \in \sqrt{\mathcal{I}} \cap \sqrt{\mathcal{J}}$. Aussi, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \in \mathcal{I}$ et il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x^m \in \mathcal{J}$. Alors $x^{n+m} = x^n \times x^m \in \mathcal{I}\cap\mathcal{J}$ d'où $x \in \sqrt{\mathcal{I}\cap\mathcal{J}}$. Nous avons donc démontré l'égalité par double inclusion.
4. Raisonnons par analyse-synthèse: Nous savons déjà que les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$. Aussi, posons $\mathcal{I} = n\mathbb{Z}$. Comme le radical d'un idéal est un idéal, nous avons $\sqrt{n\mathbb{Z}} = \alpha\mathbb{Z}$: cherchons des conditions nécessaires sur α. Comme $\alpha \in \sqrt{\mathcal{I}}$, il existe une puissance de $k \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^k \in n\mathbb{Z}$, soit encore $n|\alpha^k$. Nous voyons alors que toutes les facteurs premiers de n doivent apparaitre au moins une fois dans α. Posons alors $\alpha = \prod_{p|n, p\in\mathbb{P}} p$ le produit des nombres premiers divisant n (on note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers).
   Synthèse: Montrons $\sqrt{n\mathbb{Z}} = \alpha\mathbb{Z}$. Déjà, il est évident que $\alpha\mathbb{Z} \subset \sqrt{n\mathbb{Z}}$. Soit $x \in \sqrt{n\mathbb{Z}}$. Alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $x^j \in n\mathbb{Z}$, soit encore $n|x^j$: il s'ensuit donc que x doit contenir tous les facteurs premiers de n, et donc $\alpha|x^j$. Mais comme α est produit de nombres premiers différents, il s'ensuit que $\alpha|x$, soit encore $x \in \alpha\mathbb{Z}$. Nous en déduisons alors que $\sqrt{n\mathbb{Z}} = \alpha\mathbb{Z}$.
   Note: On appel *radical* d'un entier n l'entier $rad(n) = \prod_{p|n, p\in\mathbb{P}} p$.