

1. Notion de matrice

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$, de dimension respective p et n , et soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire de E dans F . Soient $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F . L'application f est entièrement déterminée par la donnée des $(f(e_i))_{1 \leq i \leq n}$, exprimés dans la base $\mathcal{B}_F$. En effet, tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ d'où par linéarité de f , nous avons $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i)$.

Si l'on suppose que $f(e_i) = \sum_{j=1}^p a_{ij} f_j$ alors on dit que la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est associée à l'application linéaire f ; aussi la donnée de A détermine entièrement l'application f .

2. Inversion d'une matrice carrée

Exercice: Calculer les inverses des matrices suivantes par différentes méthodes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice: Faire preuve d'astuce

Exprimer A^2 et en déduire que A est inversible et calculer son inverse. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice On désigne par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et par f l'endomorphisme associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$. Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base adaptée à cette décomposition de $\mathbb{R}^3$ en deux s.e.v. et écrire la matrice de f dans cette nouvelle base.
3. Décrire f comme composée de transformations vectorielles élémentaires.

Théorème 1 (Changement de base)

Soit E un espace vectoriel de dimension n et A et B deux matrices associées au même endomorphisme $f : E \rightarrow E$ par rapport aux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$. Alors il existe une matrice P inversible, dite matrice de passage telle que $B = P^{-1}AP$. La matrice $P = (a_{i,j})$ dont les coefficients sont définis pour tout i par $e'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$. On dit alors que les matrices A et B sont semblables

La matrice de passage est formée des vecteurs colonnes de la nouvelle base dans l'ancienne base.

Exercice: Formule de changement de base On désigne par $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ définie par $f_1 = b_1 + b_3$, $f_2 = 2b_1$ et $f_3 = -b_1 + b_2 + 2b_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire les matrices de passages $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$.
3. Soit $x = 6b_1 + b_2 + 3b_3$.
 - (a) Exprimer le vecteur x dans la base $\mathcal{B}'$.
 - (b) A présent, on désigne par $X_{\mathcal{B}}$ le vecteur colonne de x dans la base $\mathcal{B}$ et par $X_{\mathcal{B}'}$ celui dans la base $\mathcal{B}'$. Trouver deux relations (dite de changement de base) entre $X_{\mathcal{B}}$, $X_{\mathcal{B}'}$, $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$.