

**Exercice: Inversion de matrices**

Calculer les inverses des matrices suivantes par différentes méthodes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Exercice: Inversion sans calcul**

Exprimer  $A^2$  en fonction de  $A$  et  $I_3$  et en déduire que  $A$  est inversible et calculer son inverse.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercice: Base adaptée à un endomorphisme**

On désigne par  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et par  $f$  l'endomorphisme associé à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$ . Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer une base adaptée à cette décomposition de  $\mathbb{R}^3$  et écrire la matrice de  $f$  dans celle-ci.
3. Décrire  $f$  comme composée de transformations vectorielles élémentaires.

**Exercice: Formule de changement de base**

On désigne par  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Montrer que la famille  $\mathcal{B}' = (f_1 = b_1 + b_3, f_2 = 2b_1, f_3 = -b_1 + b_2 + 2b_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Ecrire les matrices de passages  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  et  $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$ .
3. Soit  $x = 6b_1 + b_2 + 3b_3$ .
  - (a) Exprimer le vecteur  $x$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
  - (b) A présent, on désigne par  $X_{\mathcal{B}}$  le vecteur colonne de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  et par  $X_{\mathcal{B}'}$  celui dans la base  $\mathcal{B}'$ . Trouver deux relations (dite de changement de base) entre  $X_{\mathcal{B}}$ ,  $X_{\mathcal{B}'}$ ,  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  et  $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$ .

**Exercice: Application à l'analyse**

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et soit  $f$  l'endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B}$  est  $A$ .

1. Montrer qu'il existe  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  de  $E$  telle que la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}'$  soit  $D$ .
2. Déterminer la matrice  $P$  telle que  $A = PDP^{-1}$  et calculer  $P^{-1}$ .
3. Calculer  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .
4. En déduire le terme général des suites  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  et  $(z_n)$  définies par  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = z_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,
 
$$\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$