

Solution : Droite de régression linéaire

Partie I - un exemple numérique

1. $x_{H_i} = x_{B_i}$ et $y_{H_i} = mx_{H_i} + p$ donc $(B_i H_i)^2 = (y_{B_i} - y_{H_i})^2 = (y_i - mx_i - p)^2$.
2. Injectons les valeurs des x_i et y_i dans $\delta(m, p)$; nous obtenons alors $\delta(m, p) = (1 + m - p)^2 + (-1 - m - p)^2 + (1 - 2m - p)^2 = 6m^2 + 3p^2 - 4mp - 2p + 3$
3. S est la matrice de la forme quadratique q , donc nous avons $q(m, p) = {}^t U \cdot S \cdot U$
4. Le polynôme caractéristique de S est $\chi_S(X) = \begin{vmatrix} 6-X & 2 \\ 2 & 3-X \end{vmatrix} = X^2 - 9X + 14 = (X-2)(X-7)$.

On a donc $\text{Spect}(S) = \{2, 7\}$ et par suite, on a $\lambda = 2$ et $\mu = 7$.

La trace est un endomorphisme invariant par changement de base

5. Nous savons que S est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, d'où $\text{Tr}(S) = \lambda + \mu = 9$. De même, nous avons $\det(S) = \lambda \times \mu = 14$. On en déduit alors que les valeurs propres de S sont les racines du polynôme $X^2 - \text{Tr}(S)X + \det(S) = X^2 - 9X + 14$. Nous avons $\Delta = 81 - 4 \times 14 = 25$, d'où les racines de ce polynôme sont $\frac{9 \pm \sqrt{25}}{2}$ soit 2 et 7.

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ donc $\det$ est invariant par changement de base.

6. S est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthogonale de vecteurs propres. Aussi, la matrice de passage P de la base canonique à la base orthogonale est-elle orthogonale, donc vérifie $P^{-1} = {}^t P$. La formule de changement de base implique alors que $S = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} {}^t P$.

La matrice de passage d'une base orthogonale à une base orthogonale est une matrice orthogonale

7. $q(m, p) = {}^t U S U = {}^t U P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} {}^t P U = {}^t ({}^t P U) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} ({}^t P U) = \lambda X^2 + \mu Y^2$.

8. On sait déjà que les sous-espaces propres de S sont de dimension 1, soit des droites orthogonales.

Etudions $E_2 : S - 2I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C_1 - 2C_2 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \ker(S - 2I_2)$ et $\ker(S - 2I_2) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$

Nous savons déjà que les espaces propres sont orthogonaux, d'où $\ker(S - 7I_2) = (\ker(S - 2I_2))^\perp = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Enfin, pour obtenir la matrice orthogonale P , il faut normer

ces vecteurs : nous obtenons alors $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où la matrice P est $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Par la formule du changement de base, $\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} X + 2Y \\ -2X + Y \end{pmatrix}$

10. $\delta(m, p) = q(m, p) - 2p + 3 = 2X^2 + 7Y^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}(-2X + Y) + 3$ On absorbe :

$$= 2 \left[X^2 + \frac{2}{\sqrt{5}} X \right] + 7 \left[Y^2 - \frac{2}{7\sqrt{5}} Y \right] + 3 = 2 \left[\left(X + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 - \frac{1}{5} \right] + 7 \left[\left(Y - \frac{1}{7\sqrt{5}} \right)^2 - \frac{1}{49 \times 5} \right] +$$

3

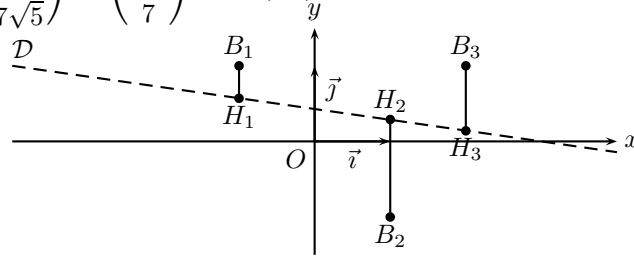
ce qui est l'expression recherchée avec $K = \frac{18}{7}$.

On en déduit que $\forall (m, p) \in \mathbb{R}^2$, $\delta(m, p) \geq K$; or cette valeur est atteinte pour $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{7\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

11. $(m_0, p_0) = P \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 \\ \frac{1}{7\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{7} \\ 3 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

12. Dessin :



Les vecteurs colonnes d'une matrice forment une base de l'image de l'endomorphisme associé. Par définition, $rg(u) = \dim(Im(u))$; il est égal à la plus grande sous-famille libre de ses vecteurs colonnes (ou ligne) de la matrice de u

Théorème du rang : $\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(Ker(f)) + rg(f)$

Si $f : E \rightarrow F$ linéaire et $\dim(E) = \dim(F)$, alors injectif $\Leftrightarrow$ surjectif $\Leftrightarrow$ bijectif

Partie II - distance en dimension 3

1. a. La famille (C_1, C_2) est l'image de la base canonique par l'endomorphisme f donc engendre $Im(f)$. Comme C_1, C_2 ne sont pas proportionnelles, ils ne sont donc pas liés et donc la famille est libre. On en déduit que $rg(f) = \dim(Im f) = 2$ et, par le théorème du rang, $\dim(Ker f) = 2 - 2 = 0$; il s'ensuit que l'endomorphisme f est injectif (puisque $\dim(Ker(f)) = 0$, nous avons $Ker(f) = \{0\}$). Par contre, f n'est pas surjectif puisque $\dim(Im(f)) < \dim(\mathbb{R}^3)$.

- b. Nous savons que $Im(f)$ est un plan vectoriel contenant les vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Aussi, le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ est orthogonal à ce plan, d'où ce plan est d'équation $-x + 3y - 2z = 0$.

Nous allons utiliser le procédé d'orthonormalization de Schmidt à la base $\mathcal{B} = (C_1, C_2)$.

On débute donc en normalisant le vecteur C_1 : nous obtenons $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

A présent, nous cherchons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $C_2 + \lambda \varepsilon_1$ soit orthogonal à ε_1 . Donc si $(\varepsilon_1 | C_2 + \lambda \varepsilon_1) = 0$, nous obtenons que $\lambda(\varepsilon_1 | \varepsilon_1) = -(\varepsilon_1 | C_2) = \frac{-2}{\sqrt{6}}$. Nous obtenons

donc le vecteur $\begin{vmatrix} 4/3 & 2/3 & 1/3 \end{vmatrix}$; il nous reste à normer ce vecteur pour obtenir $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{vmatrix} 4/3 & 2/3 & 1/3 \end{vmatrix}$.

2. a. Ces vecteurs vérifient l'équation du plan $Im(f)$, d'équation $-x + 3y - 2z = 0$. On vérifie de plus qu'ils sont orthogonaux ($u_1 \cdot u_2 = 0$) et normés ($\|u_1\| = \|u_2\| = 1$) d'où (u_1, u_2) est une base de $Im(f)$.

- b. Avec la formule rappelée dans l'énoncé,

$$Z_0 = (Y_0 | \vec{u}_1) \vec{u}_1 + (Y_0 | \vec{u}_2) \vec{u}_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{\sqrt{70}} \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- c. Le vecteur $X_0 = \begin{vmatrix} m & p \end{vmatrix}$ vérifie $A \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{7} \\ p = \frac{3}{7} \end{cases}$

Cet antécédent est bien unique car f est injective.

3. a. $AX - Y_0 = \begin{pmatrix} -m + p - 1 \\ m + p + 1 \\ 2m + p - 1 \end{pmatrix}$

$$\|AX - Y_0\|^2 = (m^2 + p^2 + 1 - 2mp + 2m - 2p) + (m^2 + p^2 + 1 + 2mp + 2m + 2p) + (4m^2 + p^2 + 1 + 4mp - 4m - 2p) = 6m^2 + 3p^2 + 4mp - 2p + 3 = \delta(m, p)$$

- b. D'après ce qui précède, $\inf \{ \delta(m, p) / (m, p) \in \mathbb{R}^2 \} = \inf \{ \|AX - Y_0\|^2 / X \in \mathbb{R}^2 \} = \inf \{ \|Y - Y_0\|^2 / Y \in Im f \} = d(Y_0, Im f) = d(Y_0, Z_0)^2$.

- c. Quand $AX = Z_0$, on a $X = X_0 = \begin{vmatrix} -1/7 & 3/7 \end{vmatrix}$ et nous obtenons alors $m = -1/7$ et $p = 3/7$. La droite de régression linéaire a pour équation $y = \frac{1}{7}(-x + 3)$, et on retrouve bien l'équation de la droite obtenue en fin de partie I.

Le distance de Y_0 à $Im(f)$ est réalisée par le vecteur Z_0 , projeté orthogonal de Y_0 sur $Im(f)$.