

# Droite de régression linéaire.

## Notations

On note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices rectangulaires à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . En particulier,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$ . On identifie un vecteur colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  avec un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  et on note  ${}^tM$  la transposée de la matrice  $M$ .

### Partie I - un exemple numérique

On munit le plan euclidien  $\mathcal{P}$  d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $M(x, y)$  désigne un point  $M$  du plan euclidien  $\mathcal{P}$  de coordonnées  $(x, y)$  dans ce repère.

Dans le plan  $\mathcal{P}$ , on considère trois points  $B_1(-1, 1)$ ,  $B_2(1, -1)$  et  $B_3(2, 1)$ .

Pour  $(m, p) \in \mathbb{R}^2$ , on considère la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = mx + p$ .

Pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , on considère le point  $H_i$  appartenant à la droite  $\mathcal{D}$  de même abscisse que le point  $B_i$ .

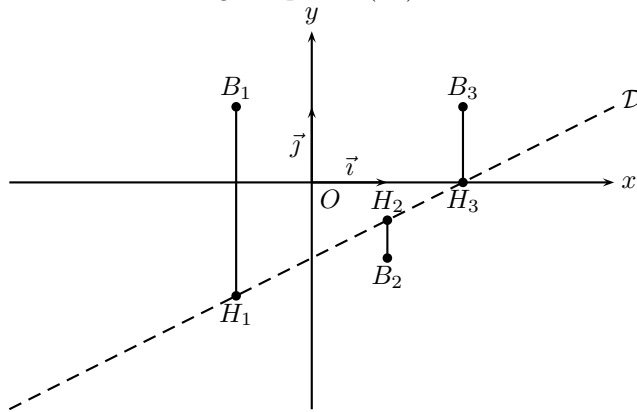
On définit la fonction  $\delta$  de  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\delta(m, p) = (B_1H_1)^2 + (B_2H_2)^2 + (B_3H_3)^2$$

où  $B_iH_i$  désigne la distance du point  $B_i$  au point  $H_i$ .

Le but du problème est de chercher le minimum de la fonction  $\delta$ .

Si  $(m, p)$  est un couple où le minimum de la fonction  $\delta$  est atteint alors la droite  $y = mx + p$  s'appelle la droite de régression linéaire de  $y$  en  $x$  associée au nuage de points  $(B_i)$ .



1. Établir que pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , si  $B_i$  est le point de coordonnées  $(x_i, y_i)$ , alors  $(B_iH_i)^2 = (y_i - mx_i - p)^2$ .

2. Soit  $(m, p) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que  $\delta(m, p) = 6m^2 + 3p^2 + 4mp - 2p + 3$ .

On considère  $q$ , la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^2$  définie par :  $q(\alpha, \beta) = 6\alpha^2 + 3\beta^2 + 4\alpha\beta$ .

On note  $S$  la matrice  $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  et  $U$  le vecteur colonne  $\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$ .

3. Exprimer  $q(m, p)$  en fonction de  $S$ ,  $U$  et  ${}^tU$  la transposée de  $U$ .

4. Déterminer les valeurs propres de  $S$ ; on les notera, dans la suite,  $\lambda$  et  $\mu$ , avec  $\lambda < \mu$ .

5. Expliquer comment retrouver les valeurs propres de  $S$ , sans calculer son polynôme caractéristique, à l'aide des quantités  $\lambda + \mu$  et  $\lambda \times \mu$ .

6. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , notée  $P$ , que l'on ne cherchera pas à déterminer, telle que  $S = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} {}^tP$ .

7. En déduire que si on pose  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$  alors  $q(m, p) = \lambda X^2 + \mu Y^2$ .

8. Déterminer une base des sous-espaces propres de  $S$ , puis en déduire la matrice orthogonale  $P$  de la question 6.

9. Montrer que l'on a :

$$\begin{cases} m &= \frac{1}{\sqrt{5}}(X + 2Y) \\ p &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2X + Y) \end{cases}$$

10. Montrer que :

$$\delta(m, p) = \lambda \left( X + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 + \mu \left( Y - \frac{1}{7\sqrt{5}} \right)^2 + K$$

avec  $K$  une constante à déterminer. Montrer que la fonction  $\delta$  admet un minimum et précisez-en sa valeur.

11. Montrer que le minimum de la fonction  $\delta$  est atteint au point  $(m_0, p_0) = (-\frac{1}{7}, \frac{3}{7})$ .

12. Représenter dans le plan les trois points  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  ainsi que la droite de régression linéaire.

## Partie II - distance en dimension 3

Dans cette partie, on utilise le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^3$  c'est-à-dire que si  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$  sont deux vecteurs colonnes de  $\mathbb{R}^3$ ,  $(X|Y) = {}^tXY = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ . La norme du vecteur  $X$  est  $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ .

On considère les matrices :  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On désigne par  $f$  l'application linéaire canoniquement associée à la matrice  $A$ , c'est-à-dire que  $f$  est l'unique application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  est  $A$ .

1. a. Déterminer le rang de l'endomorphisme  $f$  ainsi que son noyau. L'endomorphisme  $f$  est-il injectif? surjectif? bijectif?

b. Déterminer une équation cartésienne du plan  $\text{Im } f$ , ainsi qu'une base orthonormée  $\mathcal{B}'$  de  $\text{Im}(f)$ .

On rappelle que si  $\vec{x}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  et  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  muni de la base orthonormée  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ , le projeté orthogonal  $\vec{z}$  du vecteur  $\vec{x}$  sur le sous-espace vectoriel  $F$  est donné par la formule :

$$\vec{z} = (\vec{x} | \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_1 + (\vec{x} | \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_2$$

2. a. On définit les vecteurs  $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ . Montrer que la famille  $\mathcal{B}'' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  est une base de  $\text{Im } f$  et que cette base est orthonormée.

b. Montrer que  $Z_0$ , le projeté orthogonal du vecteur  $Y_0$  sur  $\text{Im } f$ , est égal à  $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On détaillera les calculs.  
On pourra utiliser la formule rappelée au 1.d. ainsi que la base orthonormée  $\mathcal{B}''$ .

c. Déterminer un antécédent  $X_0$  du vecteur  $Z_0$  par  $f$ , c'est-à-dire un vecteur  $X_0$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $Z_0 = f(X_0)$ . Cet antécédent est-il unique?

On rappelle que si  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , la distance entre  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  est définie par :

$$d(x, y) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Si  $\vec{x}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  et  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ , la distance de  $\vec{x}$  à  $F$  est définie par :

$$d(\vec{x}, F) = \inf \{ d(\vec{x}, \vec{y}) / \vec{y} \in F \} = \inf \{ \|\vec{x} - \vec{y}\| / \vec{y} \in F \}$$

On rappelle le résultat suivant :  $d(\vec{x}, F) = \|\vec{x} - \vec{z}\|$  où  $\vec{z}$  est le projeté orthogonal de  $\vec{x}$  sur  $F$ .

3. a. Soient  $(m, p) \in \mathbb{R}^2$  et  $X = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$ . Calculer  $AX - Y_0$  et en déduire que :

$$\delta(m, p) = \|AX - Y_0\|^2$$

b. Montrer que  $\inf \{ \delta(m, p) / (m, p) \in \mathbb{R}^2 \} = d(Y_0, Z_0)^2$ .

c. Retrouver l'équation de la droite de régression linéaire  $\mathcal{D}$  de la partie I.