

Matrices pseudo-magiques: Solution

1. La linéarité des applications L_i et C_j est immédiate.

E est non vide ($0 \in E$) et, si A et B sont deux matrices appartenant à E et λ et μ deux réels, les réels $L_i(A)$ et $C_j(A)$ sont tous égaux (notons $d(A)$ leur valeur commune), les réels $L_i(B)$ et $C_j(B)$ sont tous égaux (notons $d(B)$ leur valeur commune). La linéarité des applications L_i et C_j implique alors que les réels $L_i(\lambda A + \mu B)$ et $C_j(\lambda A + \mu B)$ ont tous pour valeur commune $\lambda d(A) + \mu d(B)$. Il en résulte que $\lambda A + \mu B \in E$: E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que $d(\lambda A + \mu B) = \lambda d(A) + \mu d(B)$: d est une forme linéaire sur E .

2. Le lecteur vérifiera que

$$AJ = \begin{pmatrix} L_1(A) & L_1(A) & \dots & L_1(A) \\ L_2(A) & L_2(A) & \dots & L_2(A) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_n(A) & L_n(A) & \dots & L_n(A) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad JA = \begin{pmatrix} C_1(A) & C_2(A) & \dots & C_n(A) \\ C_1(A) & C_2(A) & \dots & C_n(A) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1(A) & C_2(A) & \dots & C_n(A) \end{pmatrix} :$$

le coefficient d'indices (i, j) de la matrice AJ est $L_i(A)$, celui de la matrice JA est $C_j(A)$.

Si $A \in E$, alors $AJ = JA = d(A)J$.

Réciproquement, si $AJ = JA$, on a $\forall i \forall j \quad L_i(A) = C_j(A)$, donc $A \in E$.

On a donc prouvé que $A \in E$ si et seulement si les matrices A et J commutent.

3. On sait déjà que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

par ailleurs, $I_n \in E$ et, si A et B appartiennent à E , on a $AJ = JA$ et $BJ = JB$, d'où

$$(AB)J = A(BJ) = A(JB) = (AJ)B = (JA)B = J(AB),$$

donc $AB \in E$. Ainsi, E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc une sous-algèbre.

On sait déjà que d est une forme linéaire sur E ; par ailleurs, $d(I_n) = 1$ et, si A et B appartiennent à E , on a $(AB)J = d(AB)J$, mais aussi

$$(AB)J = A(BJ) = A(d(B)J) = d(B)(AJ) = d(B)d(A)J,$$

d'où $d(AB) = d(A)d(B)$ et d est un morphisme de $\mathbb{R}$ -algèbres.

4.a. Si $A \in E$, supposée inversible, vérifiait $d(A) = 0$, alors on aurait $AJ = d(A)J = 0$ d'où $J = A^{-1}(AJ) = 0$, ce qui est absurde : une matrice A de E inversible vérifie donc $d(A) \neq 0$.

Si $A \in E$ est inversible, on a $AJ = JA$, d'où $J = A^{-1}JA$, puis $JA^{-1} = A^{-1}J$, ce qui signifie que $A^{-1} \in E$. De plus, d étant un morphisme d'algèbres, on a $d(A)d(A^{-1}) = d(I_n) = 1$, donc $d(A^{-1}) = \frac{1}{d(A)}$.

b. La matrice J appartient à E et $d(J) = n \neq 0$, pourtant J n'est pas inversible.

5. M appartient à E car A et J sont dans E et E est un sous-espace vectoriel. On a

$$d(M) = d(A) - \frac{d(A)}{n} d(J) = 0, \quad \text{donc} \quad M \in F = \text{Ker } d.$$

F et G sont bien des sous-espaces vectoriels de E ;

• pour tout $A \in E$, on peut écrire $A = \left(A - \frac{d(A)}{n} J\right) + \left(\frac{d(A)}{n} J\right)$ et A est somme d'une matrice appartenant à F et d'une matrice appartenant à G : on a donc $E = F + G$;

• de $J \notin F$, on déduit facilement que $F \cap G = \{0\}$.

On a donc $E = F \oplus G$.

6. Le système à écrire est
$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ d + e + f = 0 \\ g + h + i = 0 \\ a + d + g = 0 \\ b + e + h = 0 \\ c + f + i = 0 \end{cases}, \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} d = -e - f \\ g = -h - i \\ b = -e - h \\ c = -f - i \\ a = e + h + f + i \end{cases}.$$

Si $A \in F$, on peut donc écrire

$$A = \begin{pmatrix} e + f + h + i & -e - h & -f - i \\ -e - f & e & f \\ -h - i & h & i \end{pmatrix} = eU + fV + hW + iX .$$

Il en résulte que $F \subset \text{Vect}(U, V, W, X)$, l'autre inclusion étant immédiate. La famille (U, V, W, X) étant libre (*vérification immédiate*), elle forme une base de F , d'où $\dim F = 4$.

Enfin, $E = F \oplus G$ avec $\dim G = 1$, donc $\dim E = 5$ et une base de E est la famille de matrices (U, V, W, X, J) .

7.a. • Les matrices $T_{r,s} = E_{11} + E_{rs} - E_{1s} - E_{r1}$ appartiennent toutes à F (vérification immédiate).

• La famille $\mathcal{T}$ est libre : si une combinaison linéaire $\sum_{r=2}^n \sum_{s=2}^n \lambda_{r,s} T_{r,s}$ est nulle, alors, pour tout couple $(r_0, s_0) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2$, le coefficient d'indices (r_0, s_0) de cette combinaison linéaire est λ_{r_0, s_0} et ce coefficient est donc nul.

• La famille $\mathcal{T}$ engendre F : si $A = (a_{ij}) \in F$, il est facile de vérifier que $A = \sum_{r=2}^n \sum_{s=2}^n a_{rs} T_{r,s}$ (la vérification de cette identité est évidente pour chaque coefficient a_{ij} avec $i \geq 2$ et $j \geq 2$; enfin, le fait que A appartienne à F entraîne que $a_{i1} = -\sum_{j=2}^n a_{ij}$ (2 $\leq i \leq n$), que

$$a_{1j} = -\sum_{i=2}^n a_{ij} \quad (2 \leq j \leq n) \text{ et enfin que } a_{11} = \sum_{r=2}^n \sum_{s=2}^n a_{rs}.$$

b. On a donc $\dim F = \text{Card}(\llbracket 2, n \rrbracket^2) = (n-1)^2$ puis, comme $E = F \oplus G$ où G est une droite vectorielle, $\dim G = (n-1)^2 + 1$.