

Endomorphismes remarquables

Exercice 1: Matrice circulante

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_n \\ a_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_J(X)$ de J (dans $\mathbb{C}$). Précisez quelles sont les racines (complexes) de χ_J et en déduire que J est diagonalisable.
2. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = P(J)$. En déduire que M est diagonalisable et précisez sa forme diagonale.
Calculer alors $\det(M)$.

Exercice 2: Matrice avec que des 1

Soit $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Exprimer L^2 en fonction de L et n .
2. En déduire une expression de L^k en fonction de L, n et k .
3. Déduire de la question 1 un polynôme annulateur de L (on souhaite un polynôme de plus petit degré possible).
Quelles sont alors les valeurs propres possibles de L ? Pouvez-vous dire que L est diagonalisable ?
4. Etudier les sous-espaces propres de la matrice L et exhiber une base de chacun d'eux.

Exercice 3: Matrice stochastique

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On dit que la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ est stochastique si $\forall (i,j) \in \{1, \dots, p\}^2$,

$a_{i,j} \in [0;1]$ et $\forall j \in \{1, \dots, p\}$, $\sum_{i=1}^p a_{i,j} = 1$. On note alors E_p l'ensemble des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ tels que

$\forall 1 \leq i \leq p$, $x_i \in [0;1]$ et $\sum_{i=1}^p x_i = 1$. Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

1. Propriétés générales des matrices stochastiques

- (a) Montrer que si $X \in E_p$, alors $MX \in E_p$.
- (b) Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est stable par produit.

- (c) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients positifs ou nuls et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est stochastique si et seulement si ${}^tAV = V$. En déduire que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique (nouvelle démonstration).

2. Valeurs propres d'une matrice stochastique

- (a) Montrer que 1 est valeur propre de M .
- (b) Montrer que si λ est une valeur propre de M , alors $|\lambda| \leq 1$.

- (c) Soit $\lambda \neq 1$ une valeur propre de M , et X un vecteur propre associé à λ . Montrer que $\sum_{i=1}^p x_i = 0$.

Exercice 4: Matrice carrée d'une matrice

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle *racine carrée* de A toute matrice B vérifiant $B^2 = A$.

- Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels distincts et D la matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
 - Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $DM = MD$ si et seulement si M est une matrice diagonale.
 - Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une racine carrée de D . Montrer que B est diagonale.
 - Déterminer alors une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice D admette une racine carrée. Dans ce cas, déterminer le nombre de ses racines carrées.
- On suppose dans cette question que les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont distincts et sont les valeurs propres de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - Montrer qu'il existe une matrice de passage P telle que $A = PDP^{-1}$ où D désigne une matrice diagonale que l'on précisera.
 - A toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on associe la matrice $\tilde{B} = P^{-1}BP$. Montrer que $B^2 = A$ si et seulement si $\tilde{B}^2 = D$. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de A pour que A admette au moins une racine carrée.
 - On suppose alors cette condition réalisée. En déduire la forme des racines carrées de A en fonction de la matrice P , puis la somme des racines carrées de A .
- Soit $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
 - Montrer qu'il existe $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.
 - Soient $B, C \in S_n^+(\mathbb{R})$ tels que $B^2 = C^2 = A$. Montrer qu'il existe deux matrices P et Q , inversibles, et deux matrices diagonales D et Δ , telles que $A = PD^2 {}^tP = Q\Delta^2 {}^tQ$.
 - En déduire qu'il existe une matrice R inversible telle que $RD^2 = \Delta^2 R$. Montrer alors que $RD = \Delta R$ puis que $B = C$. Conclure.

Exercice 5: Réduction d'endomorphisme et système différentiel (cas simple)

On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ le système différentiel
$$\begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= x \\ z' &= x + y + z \end{cases}$$

- Soit $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Trouver la matrice A vérifiant le système $X' = AX$.
- Montrer que A est diagonalisable; calculer alors la matrice P telle que $P^{-1}AP = D$ où D est une matrice diagonale.
- On pose $Y = P^{-1}X$. Montrer que Y vérifie la relation $Y' = DY$. En déduire qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $Z(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} \\ \beta e^{2t} \\ \gamma \end{pmatrix}$.
- En déduire les solutions du système différentiel initial.