

Exemples de matrices semblables à leur inverse

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3.

Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u$ (n fois).

On note $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, et I_3 la matrice unité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Pour deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on dira que la matrice A est **semblable** à la matrice B s'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$. On rappelle que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E , si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, si u est un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}'$ et de matrice B dans la base $\mathcal{B}$ alors $A = P^{-1}BP$ (c'est-à-dire, la matrice A est semblable à la matrice B).

Partie A

- On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B .
Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
On pourra désormais dire que les matrices A et B **sont** semblables.
- Démontrer que deux matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ de déterminants différents ne sont pas semblables.
- Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.
On considère l'application w de $\ker u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.
 - Montrer que $\mathfrak{Im}(w) \subset \ker u^i$.
 - En déduire que $\dim(\ker u^{i+j}) \leq \dim(\ker u^i) + \dim(\ker u^j)$.
- Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $rg(u) = 2$.
 - Montrer que $\dim(\ker u^2) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question **3b**.)
 - Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E .
 - Ecrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.
- Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $rg(u) = 1$.
 - Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.
 - Justifier l'existence d'un vecteur c de $\ker u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E .
 - Ecrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1} .

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

1. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.
2. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.
3. On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
4. On suppose dans cette question que $rg(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

(a) Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire, en utilisant la question **A.4.**, une matrice semblable à la matrice M .

(b) Calculer M^3 et déterminer $rg(M)$.

(c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.

(d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

5. On suppose dans cette question que $rg(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$. Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

6. **Exemple** : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

(a) Montrer que $\ker(u - id_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2) .

(b) Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E , et écrire la matrice de u dans cette base.

(c) Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

7. Réciproquement, toute matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à

une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?