

Solution : Polynômes de Tchebychev et méthode des moindres carrés.

Première partie :

La fonction $\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0; \pi]$ est la fonction réciproque de la fonction $\cos$.

- 1. a.** T_0 vérifie $T_0(x) = \cos(0) = 1$. T_1 vérifie $T_1(x) = \cos(\text{Arccos}(x))$; comme ces deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre, on a $T_1(x) = x$. T_2 vérifie $\cos(2 \text{Arccos}(x)) = 2 \cos(\text{Arccos}(x))^2 - 1 = 2x^2 - 1$. T_3 vérifie $T_3(x) = \cos(3 \text{Arccos}(x))$. Calculons $\cos(3a) = \cos(2a + a) = \cos(2a) \cos(a) - \sin(2a) \sin(a) = (2 \cos^2(a) - 1) \cos(a) - 2 \cos(a) \sin^2(a) = 2 \cos^3(a) - \cos(a) - 2 \cos(a)(1 - \cos^2(a)) = 4 \cos^3(a) - 3 \cos^2(a)$. Aussi, nous en déduisons que $T_3(x) = 4x^3 - 3x^2$.

On utilise les formules de duplication du cosinus : $\cos(2a) = 2 \cos^2(a) - 1$.

- b.** Posons $\theta = \text{Arccos}(x) \in [0, \pi]$. D'après la formule de Moivre, nous avons que $T_n(x) = \cos(n\theta) = \text{Re}(e^{in\theta}) = \text{Re}((e^{i\theta})^n) = \text{Re}((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n)$.

Dans le cas où $n = 2p$, nous en déduisons alors que

$$T_{2p}(x) = \text{Re} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} \cos^{2p-k}(\theta) \cdot \sin^k(\theta) \cdot i^k$$

Nous obtenons la partie réelle de cette somme en considérant les indices k pairs : aussi, nous avons

$$T_{2p}(x) = \binom{2p}{0} x^{2p} - \binom{2p}{2} x^{2p-2} (1-x^2)^2 + \dots + (-1)^p \binom{2p}{2p} (1-x^2)^p.$$

Dans le cas où $n = 2p + 1$, alors nous avons

$$T_{2p+1}(x) = \text{Re}((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^{n+1}) = \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} \cos^{2p+1-k}(\theta) \cdot \sin^k(\theta) \cdot i^k$$

Là encore, la partie réelle est obtenue en considérant les indices k pairs : aussi, nous obtenons

$$T_{2p+1}(x) = \binom{2p+1}{0} x^{2p+1} - \binom{2p+1}{2} x^{2p-1} (1-x^2) + \dots + (-1)^p \binom{2p+1}{2p} x (1-x^2)^p.$$

- 2. a.** Posons $\theta = \text{Arccos}(x) \in [0, \pi]$, et donc $x = \cos(\theta)$. Nous avons alors $2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 2 \cos(\theta) \cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) = 2 \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) - \cos((n-1)\theta) = \cos((n+1)\theta) = T_{n+1}(x)$.

Formule de linéarisation $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

- b.** Démontrons que T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant égal à 2^{n-1} par récurrence double sur l'entier naturel $n \geq 1$.

Initialisation : Les formules sont vraies aux rangs $n = 1$ et $n = 1$ d'après la question **1. a**

Hérédité : Supposons donc ces propriétés vraies au rang n et $n-1$, c'est à dire que T_n et T_{n-1} sont respectivement des polynômes de degré n et $n-1$, de coefficient dominant respectif 2^{n-1} et 2^{n-2} . Alors par la formule **2. a** nous avons que $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ d'où T_n est un polynôme de degré $n+1$ et de coefficient dominant 2^n . Aussi, la propriété est vraie au rang $n+1$. Nous en déduisons alors par le théorème de la récurrence que pour tout $n \geq 1$, T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} .

- c.** Nous avons $T_n(1) = \cos(n \text{Arccos}(1)) = \cos(0) = 1$ et $T_n(-1) = \cos(n \text{Arccos}(-1)) = \cos(n\pi) = (-1)^n$.

- 3. a.** Puisque Arccos réalise une bijection de $[-1; 1]$ sur $[0; \pi]$, nous en déduisons que pour tout $x \in [-1; 1]$, il existe un unique $\theta \in [0; \pi]$ tel que $\cos(\theta) = x$. Aussi, nous avons $T_n(x) = 0$ si et seulement si $\cos(n\theta) = 0$ ce qui est équivalent à $n\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ soit encore $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Nous en déduisons donc l'équivalence $T_n(x) = 0 \iff \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Toutes ces racines appartiennent à l'intervalle $[-1; 1]$ puisque le cosinus est à valeur dans cet intervalle.

- b. Le polynôme T_n est de degré n et admet n racines sur $[-1; 1]$, donc toutes les racines de T_n sont dans l'intervalle $[-1; 1]$.
4. Soient donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines du polynôme T_n , classées dans l'ordre croissant (i.e. $\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$). La fonction T_n étant polynomiale, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$: aussi, on peut appliquer le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[\lambda_i; \lambda_{i+1}[$ et nous obtenons qu'il existe $c_i \in]\lambda_i; \lambda_{i+1}[$ tel que $T'_n(c_i) = 0$, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Aussi, nous obtenons $n-1$ racines de T'_n ; comme c'est un polynôme de degré $n-1$, il s'ensuit que nous avons obtenu toutes les racines de T'_n .
- Reste donc à calculer celles-ci. Pour tout $x \in]-1; 1[$, nous avons $T_n(x) = \cos(n \cdot \text{Arccos}(x))$ d'où en dérivant cette relation nous obtenons que $T'_n(x) = n \cdot \sin(n \cdot \text{Arccos}(x)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Aussi, $T'_n(x) = 0$ si et seulement si $\sin(n \cdot \text{Arccos}(x)) = 0$, d'où en posant $\theta = \text{Arccos}(x)$ nous obtenons que $n\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$ d'où $\theta = \frac{p\pi}{n}$ avec $p \in \{1, \dots, n-1\}$. Aussi, les racines de T'_n sont les $c_k = \cos \frac{k\pi}{n}$ avec $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.
5. a. Les extrema de la fonction T_n définie sur $[-1; 1]$ sont obtenus soit pour des points pour lesquels la fonction dérivée T'_n s'annule, soit aux bornes de l'intervalle. Nous avons $T_n(c_k) = \cos(n \cdot \text{Arccos} \cos \frac{k\pi}{n}) = \cos(k\pi) = (-1)^k$, ce qui constitue bien des extremums de la fonction T_n (puisque celle-ci est à valeur dans $[-1; 1]$). Par ailleurs, nous avons déjà montré que $T_n(1) = 1$ et $T_n(-1) = (-1)^n$, ce qui constitue aussi des valeurs extrémales. Au final, nous en déduisons que $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1, n\}$, $\cos \frac{k\pi}{n}$ est un extrémum de T_n , et la valeur en ce point est $T_n(c_k) = (-1)^k$.
- b. Nous savons que les polynômes (T_n) vérifient la relation de récurrence $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$. Aussi, démontrons la formule $T_n(ch(x)) = ch(nx)$ en raisonnant par récurrence double sur l'entier naturel $n \geq 1$.
- Initialisation : Nous savons que $T_1(x) = x$ d'où $T_1(ch(x)) = ch(x)$. De même, $T_2(ch(x)) = 2ch^2(x) - 1 = ch(2x) + ch(0) - 1$. Or, $ch(0) = 1$ d'où $T_2(ch(x)) = ch(2x)$ et la formule est vraie au rang $n = 2$.
- Hérédité : Supposons à présent que la formule soit vraie aux rangs $n-1$ et n , et démontrons-la au rang $n+1$. Par la formule de récurrence, nous avons donc que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T_{n+1}(ch(x)) &= 2ch(x)T_n(ch(x)) - T_{n-1}(ch(x)) = 2ch(x)ch(nx) - ch((n-1)x) \\ &= ch((n+1)x) + ch((n-1)x) - ch((n-1)x) = ch((n+1)x). \end{aligned}$$

Nous en déduisons alors que la formule est vraie au rang $n+1$. Aussi, par le théorème de la récurrence, nous avons démontré que la formule $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(ch(x)) = ch(nx)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Soit à présent $x > 1$. Alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}^*$ tel que $ch(\theta) = x$ d'où nous déduisons que $T_n(x) = T_n(ch(\theta)) = ch(n\theta) > 1$.

Si $x < -1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}^*$ tel que $x = -ch(\theta)$. Nous avons alors $T_n(x) = T_n(-ch(\theta)) = (-1)^n T_n(ch(\theta)) = -ch(n\theta) < -1$. Nous en déduisons donc que si $|x| > 1$, alors $|T_n(x)| > 1$.

On a $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$ par les formules 1.b

6. a. Supposons donc qu'il existe $Q \in \mathcal{P}_n$ tel que $M(Q) = \max_{|x| \leq 1} |Q(x)| < 1$. Aussi, nous en déduisons en particulier que $|Q(c_k)| < 1$. Il s'ensuit donc que $Q_n(c_k) = P_n(c_k) - Q(c_k) = (-1)^k - Q(c_k)$. Il s'ensuit donc que $Q_n(c_k)$ est du signe de $(-1)^k$. Aussi, la fonction $x \mapsto Q_n(x)$ change au moins $n-2$ fois de signe sur $[-1; 1]$, et donc d'après le théorème des valeurs intermédiaire, pour tout $k \in \{2, \dots, n-1\}$, il existe $d_k \in]c_k; c_{k+1}[$ tel que $Q_n(d_k) = 0$. Classons ces racines dans l'ordre décroissant $d_2 > d_3 > d_4 > \dots > d_{n-1}$. Enfin, comme $Q_n(-1) = (-1)^n - Q(-1)$ et que $|Q(-1)| < 1$, nous pouvons encore appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour trouver une nouvelle racine de Q_n sur $] -1; d_{n-1}[$. Il en va de même sur $]d_2; 1[$ et donc nous obtenons n racines distinctes de Q_n .
- b. Or, puisque les polynômes T_n et Q ont même degré et ont même coefficient dominant, nous en déduisons que le polynôme Q_n est de degré au plus $n-1$, et il admet n racines d'où Q_n est le polynôme nul. $Q_n = 0$ et donc $Q = T_n$. Or, $\max_{|x| \leq 1} |T_n(x)| = 1$ ce qui contredit l'hypothèse sur Q .
- Nous avons donc démontré, en raisonnant par l'absurde, que $\forall P \in \mathcal{P}_n, \max_{|x| \leq 1} |P(x)| \geq 1$.

7. a. Soit $x \in [-1; 1]$, $x \neq \lambda_k$. Alors nous avons $F_x(x) = \underbrace{(f(x) - P_f(x))}_{=e_x} P_n(x) - e_x P_n(x) = 0$.

D'après la formule du polynôme d'interpolation de Lagrange, nous avons que $P_f(\lambda_k) = f(\lambda_k)$ et $P_n(\lambda_k) = 0$ d'où nous déduisons que $F_x(\lambda_k) = 0$.

- b. Nous déduisons de la question précédente que la fonction F_x s'annule en $n+1$ points. Aussi, d'après le théorème de Rolle appliqué à chacun des segments de bornes deux points d'annulation de F_x consécutifs, nous en déduisons que F'_x s'annule en au moins n points. Aussi, par itération, nous en déduisons que $F_x^{(k)}$ s'annule en $n+1-k$ points, et donc $F_x^{(n)}$ s'annule au moins en une valeur $\alpha \in]-1; 1[$.

Nous avons $F_x(t) = (f(t) - P_f(t)) T_n(x) - e_x P_n(t)$. Aussi, en dérivant n fois cette expression, nous obtenons

$$F_x^{(n)}(t) = \left(f^{(n)}(t) - P_f^{(n)}(t) \right) T_n(x) - e_x P_n^{(n)}(t)$$

Or, $P_f(t)$ est un polynôme de degré $n-1$ donc sa dérivée n -ième est nulle. De plus $T_n^{(n)} = 2^{n-1}n!$ d'où $F_x^{(n)}(\alpha) = f^{(n)}(\alpha)T_n(x) - e_x n!2^{n-1} = 0$, d'où nous déduisons l'expression de l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $T_n(x)$: $e_x = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}n!} f^{(n)}(x)$.

- c. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc sa dérivée n -ième est bornée sur le compact $[-1; 1]$. Aussi, il existe M tel que $\forall x \in [-1; 1]$, $|f^{(n)}(x)| \leq M$. Il s'ensuit alors que $|e_x| \leq \frac{M}{2^{n-1}n!}$.

Seconde partie :

1. Déjà, vérifions la convergence de l'intégrale impropre définissant $\langle P|Q \rangle$. La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur le compact $[-1; 1]$, donc est bornée : soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in [-1; 1]$, $|P(t)Q(t)| \leq M$. On en déduit alors la majoration $0 \leq \left| \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \right| \leq \left| \frac{M}{\sqrt{1-t^2}} \right|$. De l'identité remarquable $1-t^2 = (1+t)(1-t)$ nous en déduisons que $1-t^2 \sim \frac{1}{\sqrt{2(1-t)}}$ qui est une intégrale convergente par le critère de Riemann. De même, on montre que cet intégrale est convergente en -1 par la même méthode et donc l'intégrale est bien définie. La symétrie de $(P; Q) \mapsto \langle P|Q \rangle$ provient de la commutativité du produit de fonctions réelles. La bilinéarité de l'application $(P; Q) \mapsto \langle P|Q \rangle$ résulte de la linéarité de l'intégrale. Enfin, puisque $\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} > 0$ pour $t \in]-1; 1[$, nous en déduisons par positivité de l'intégrale que $\langle P|P \rangle \geq 0$, d'où l'application $(P; Q) \mapsto \langle P|Q \rangle$ est bien positive. Reste alors à montrer qu'elle est définie positive : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\langle P|P \rangle = 0$. Comme l'application $t \mapsto \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $] -1; 1[$, l'intégrale est nulle si et seulement si $\forall t \in] -1; 1[$, $\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0$. Il s'ensuit alors que $\forall t \in] -1; 1[$, t est une racine du polynôme P d'où celui-ci est le polynôme nul. On démontre donc bien ainsi que $\langle | \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soient p et q deux entiers naturels vérifiant $0 \leq p < q \leq n$. Calculons l'intégrale $\langle P|Q \rangle$ au moyen du changement de variable $\theta = \text{Arccos}(t)$ soit $d\theta = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

$$\begin{aligned} \langle T_p|T_q \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{T_p(t)T_q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^\pi \cos(p\theta) \cos(q\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(p+q)\theta + \cos(p-q)\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(p+q)\theta}{p+q} + \frac{\sin(p-q)\theta}{p-q} \right]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la famille $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille orthogonale de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ et comme elle est maximale, il s'ensuit que $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comme la famille $(T_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ des réels tels que $P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k T_k$. Aussi, par bilinéarité du produit scalaire, nous avons $\langle P | T_n \rangle = \langle \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k T_k | T_n \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \langle T_k | T_n \rangle = 0$. Aussi, T_n est orthogonal à tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $T_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. a. Si $P \in \mathcal{U}_n$ alors $P(X) = X^n + Q(X)$ où $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, ce qui équivaut à $P - X^n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- b. Résulte de l'orthogonalité de T_n avec $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- c. Nous constatons que $\deg(Q) \leq n-1$ d'où il s'ensuit que $\langle Q - S | T_n \rangle = 0$.
- d. Par Pythagore, nous avons $\|2^{n-1}X^n - S\|^2 = \|Q + T_n - S\|^2 = \|Q - S\|^2 + \|T_n\|^2$. Aussi, cette égalité est minimale lorsque S parcourt $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ prends la valeur $S = Q$. Aussi, le minimum de $\|2^{n-1}X^n - S\|^2$ est atteint pour $S(X) = 2^{n-1}X^n - T_n(X)$.
- 5.