

Polynômes de Tchebychev et méthode des moindres carrés.

Première partie:

Soit $x \in [-1; 1]$. Pour tout entier naturel n , on définit $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x))$.

1. (a) Calculer T_0, T_1, T_2 et T_3 .

(b) Montrer alors que, pour tout entier naturel p , nous avons:

$$T_{2p}(x) = \binom{2p}{0}x^{2p} - \binom{2p}{2}x^{2p-2}(1-x^2)^2 + \cdots + (-1)^p \binom{2p}{2p}(1-x^2)^p.$$

$$T_{2p+1}(x) = \binom{2p+1}{0}x^{2p+1} - \binom{2p+1}{2}x^{2p-1}(1-x^2) + \cdots + (-1)^p \binom{2p+1}{2p}x(1-x^2)^p.$$

2. (a) Pour tout entier naturel n , montrer que $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.
 (b) Montrer que, T_n est un polynôme en la variable x , de degré n et précisez son coefficient dominant.
 On appelle le polynôme T_n le polynôme de Tchebychev d'ordre n .
 (c) Calculer $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.
3. On considère à présent la fonction polynomiale associée au polynôme T_n , définie sur $\mathbb{R}$.
 (a) Déterminer les racines de T_n sur $[-1; 1]$.
 (b) En déduire toutes les racines de T_n sur $\mathbb{R}$. Dans la suite, on désignera par $\{\lambda_k; 0 \leq k \leq n\}$ l'ensemble des racines du polynôme T_n , et on prendra $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{n-1}$.
4. Montrer que toutes les racines c_k du polynôme dérivé T'_n appartiennent à l'intervalle $[-1; 1]$ et les calculer.
 Dans la suite, on classera les (c_k) en ordre décroissant.
5. (a) Calculer les valeurs des réels $x \in [-1; 1]$ pour lesquels la fonction T_n atteint un extrémum et calculer les valeurs de ces extrema.
 (b) On rappelle que l'on définit le cosinus hyperbolique d'un réel x par $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $2ch(a) \cdot ch(b) = ch(a+b) + ch(a-b)$.
 Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $T_n(ch(x)) = ch(nx)$.
 En déduire que si $|x| > 1$, alors $|T_n(x)| > 1$ (on pourra penser à effectuer le changement de variable $x = ch(\theta)$).
6. Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes de degré n dont le coefficient dominant est 2^{n-1} , et soit $M(P) = \sup_{|x| \leq 1} |P(x)|$.
 On suppose qu'il existe $Q \in \mathcal{P}_n$ tel que $M(Q) < 1$.
 (a) En étudiant le signe du polynôme $Q_n(x) = T_n(x) - Q(x)$ aux points $c_k, -1$ et 1 , montrer que Q_n possède n racines distinctes.
 (b) En déduire alors que tout polynôme $P \in \mathcal{P}_n$ vérifie $M(P) \geq 1$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{\lambda_k, 0 \leq k \leq n-1\}$ l'ensemble des racines du polynôme T_n . Soit $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. A la fonction f et aux couples de points $(\lambda_k; f(\lambda_k))_{0 \leq k \leq n-1}$, nous associons le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par:

$$P_f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\lambda_k) \cdot \prod_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ i \neq k}} \frac{x - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i}.$$

$P_f(x)$ constitue une approximation de la valeur $f(x)$ sur l'intervalle $[-1; 1]$: on désigne par $e_n(x) = f(x) - P_f(x)$ l'erreur commise.

Soit $x \in [-1; 1]$ et $x \neq \lambda_k$. On définit la fonction $F_x : t \mapsto F_x(t)$ sur l'intervalle $[-1; 1]$ par la relation

$$F_x(t) = (f(t) - P_f(t))T_n(x) - e_x \cdot T_n(t).$$

- (a) Calculer $F_x(x)$ et, pour tout entier naturel $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, calculer $F_x(\lambda_k)$.
 (b) Montrer qu'il existe $\alpha \in]-1, 1[$ tel que $F_x^{(n)}(\alpha) = 0$.
 En déduire alors que $e_x = \frac{T_n(x)}{2^{n-1} n!} f^{(n)}(\alpha)$.
 (c) En déduire une estimation de l'erreur commise lorsque l'on remplace dans un calcul numérique $f(x)$ par $P_f(x)$.

Seconde partie:

1. Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P|Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que la famille $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. Soit $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires à coefficients réels de degré n .
 - (a) Montrer l'équivalence

$$P \in \mathcal{U}_n \iff P - X^n \in \mathbb{R}_{n-1}[X].$$
 - (b) Soit S un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Calculer $\langle S|T_n \rangle$.
 - (c) On pose alors $Q(X) = 2^{n-1}X^n - T_n(X)$. Calculer $\langle Q - S|T_n \rangle$.
 - (d) Montrer que $\|2^{n-1}X^n - S\|^2 = \|T_n\|^2 + \|Q - S\|^2$.
En déduire le minimum de $\|2^{n-1}X^n - S\|^2$ lorsque S parcourt $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
5. Montrer que $\inf_{P \in \mathcal{U}_n} \int_{-1}^1 \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est atteint pour un polynôme P proportionnel à T_n .