

Anneaux principaux

Partie I: Anneaux principaux

1. Donner la définition d'un anneau $(A, +, \times)$ principal.
2. Qu'est ce qu'un élément irréductible de A ?
3. Démontrer que, dans un anneau principal A , les trois assertions suivantes sont équivalentes:
 - x est un élément irréductible de A
 - L'idéal (x) est premier
 - L'idéal (x) est maximal
4. Rappeler ce qu'est la décomposition de tout élément en produit d'éléments irréductibles dans un anneau principal.
5. Montrer le lemme d'Euclide suivant: soit $(A, +, \times)$ un anneau principal et x un élément irréductible de A . Si x divise le produit ab , alors x divise a ou x divise b .

Partie 2: Anneaux des polynômes $\mathbb{K}[X]$

On désigne par $\mathbb{K}$ un corps commutatif

1. Précisez les lois $+$ et $\times$ qui munissent $\mathbb{K}[X]$ d'une structure d'anneau.
2. Rappeler la définition de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
3. Démontrer que l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est principal.
4. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On définit le Pgcd de P et de Q comme étant l'unique polynôme unitaire R vérifiant $(P) + (Q) = (R)$.
Montrer le théorème de Bezout: il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tel que $UP + VQ = R$.
5. Précisez quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et de $\mathbb{C}[X]$.

Partie 3: Théorie des corps (introduction!)

1. Montrer, en raisonnant sur les idéaux, que l'anneau quotient $\mathbb{K}[X]/(P)$ est un corps si et seulement si P est un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$.
2. Montrer, en raisonnant sur les éléments, que l'anneau quotient $\mathbb{K}[X]/(P)$ est un corps si et seulement si P est un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$.
3. Que pouvez-vous dire de $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$?