

Exemples de matrices semblables à leur inverse

Aide.

- $GL_3(\mathbb{R})$: On désigne par $GL_3(\mathbb{R})$ le groupe linéaire des matrices d'ordre 3, c'est-à-dire l'ensemble de matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. C'est un groupe pour le produit matriciel. Notez bien que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$ n'est pas un groupe (il y a des matrices non inversibles dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$). Aussi, une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ est une "matrice de passage".
- **Relation d'équivalence** Soit E un ensemble quelconque. Une relation $\mathcal{R}$ sur E est la donnée d'un sous-ensemble de $E \times E$ (donc la donnée de couples $(x, y) \in E \times E$). On dit que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si elle est:

- Réflexive: $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- Symétrique: Si $(x, y) \in E^2$ tels que $x\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$.
- Transitive: Si $(x, y, z) \in E^3$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.

L'archétype de la relation d'équivalence est la relation d'égalité, ou (moins trivial) la relation de congruence modulo n .

- Le déterminant est une application multiplicative, c'est-à-dire que $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$.
- $\ker(u^{i+j})$ Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire, on désigne par $\ker(f) = \{x \in E | f(x) = 0\}$. Aussi, $\ker(u^{i+j}) = \{x \in E | u^{i+j}(x) = 0\}$ où $u^{i+j} = \underbrace{u \circ u \circ u \dots \circ u}_{i+j \text{ fois}}$.
- **Théorème du rang** Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$. On désigne $\dim(\operatorname{Im}(f))$ comme étant le rang de l'application f .
- **Dimension / base** Rappelons que E est un espace vectoriel de dimension n si et seulement toute base de E est de cardinal n .
Théorème de la base incomplète Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de E de cardinal $m < n$, alors on peut la compléter en une base de E (ie. en une famille de cardinal n qui est à la fois libre et génératrice dans E).
Critère Toute famille libre et maximale d'éléments de E est une base de E .
Critère Toute famille génératrice et minimale d'éléments de E est une base de E .
- **Inverse du produit** (AB) Si A et B sont deux matrices carrées, alors $(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.
- **Astuce pour montrer que les matrices A et B sont semblables** Parfois, on peut simplement montrer que A est semblable à une certaine matrice C (par exemple on nous donne une matrice de passage où une forme particulière). Il est alors intéressant de montrer que B est semblable à C et d'utiliser la transitivité de la relation *être semblable à*.
- **I.4 et I.5** Si on arrive pas à traiter **a.** et **b.** on peut admettre l'existence de la famille de **b.** et traiter la question **c.**
- **II.4 et 5** On se retrouve ici avec un endomorphisme de rang 2 ou 1: aussi il faut utiliser la question **I.4** ou **I.5**
- **II.6** Question pratique à traiter avant d'éventuellement revenir sur d'autres questions non traitées du sujet.