

Algorithme de Babylone

L'objectif de ce problème est de présenter deux suites de nombres rationnels convergent vers $\sqrt{2}$ puis de comparer leur vitesse de convergence. Les parties I et II sont indépendantes alors que la partie III exploite les deux premières.

Partie 1: Première suite

On considère les suites réelles (p_n) et (q_n) définies par $\begin{cases} p_0 = 1 \\ q_0 = 1 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} p_{n+1} = p_n + 2q_n \\ q_{n+1} = p_n + q_n \end{cases}$

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, les nombres p_n et q_n sont des entiers strictement positifs.
 (b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \geq q_n$.
2. On définit alors une suite de réels (u_n) en posant, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{p_n}{q_n}$.
 (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
 (b) Justifier que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2} |u_n - \sqrt{2}|$.
 (c) En déduire la limite de la suite (u_n) .
3. (a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+2} = ap_{n+1} + bp_n$.
 (b) En déduire l'expression du terme général de la suite (p_n) .
 (c) De même, exprimer le terme général de la suite (q_n) .
 (d) Retrouver ainsi la limite de la suite (u_n) .

Partie II: Une seconde suite

On considère la suite réelle (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{2} \left(v_n + \frac{2}{v_n} \right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est bien définie et est un nombre rationnel de l'intervalle $[1; 2]$.
2. Observer que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(v_n - \sqrt{2})^2}{2v_n}$.
3. En déduire la convergence de la suite (v_n) ainsi que sa limite.

Partie III: Comparaison des vitesses de convergence

On pose $t_n = \frac{v_n - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}$.

1. Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n, u_n et v_n .
2. En déduire la limite de la suite (t_n) .
 Que pouvez-vous alors déduire quant à la rapidité de convergence des suites (u_n) et (v_n) vers $\sqrt{2}$?