

# Algorithme de Babylone

## Solution

### Première partie

1. (a) Raisonnons par récurrence sur l'entier naturel  $n$ .

*Initialisation:* Pour  $n = 0$ , nous avons que  $p_0 = q_0 = 1$  donc la propriété est vraie au rang  $n = 0$ .

*Hérédité:* Supposons la propriété vraie au rang  $n \geq 0$  et démontrons là au rang  $n + 1$ . Alors, par définition des suites  $(p_n)$  et  $(q_n)$ , nous avons que  $p_{n+1} = p_n + 2q_n$  et  $q_{n+1} = p_n + q_n$ . Puisque  $p_n$  et  $q_n$  sont des entiers naturels non nuls, nous en déduisons que  $p_{n+1}$  et  $q_{n+1}$  sont aussi des éléments de  $\mathbb{N}^*$ . Aussi, la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

On démontre aussi par le théorème de la récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n$  et  $q_n$  sont des entiers naturels non nuls.

- (b) Raisonnons là aussi par récurrence sur l'entier naturel  $n$ .

*Initialisation:* Nous avons clairement  $p_0 = q_0$  d'où  $p_0 \geq q_0$  et donc la propriété est vraie au rang  $n = 0$ .

*Hérédité:* Supposons à présent que, pour  $n \geq 0$  fixé, la propriété  $p_n \geq q_n$  est vérifiée. Alors  $p_{n+1} = p_n + 2q_n \geq p_n + q_n = q_{n+1}$  d'où la propriété est vraie au rang  $n + 1$ . Il s'ensuit donc bien, par le théorème de la récurrence, que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $p_{n+1} \geq q_{n+1}$ .

2. (a)  $u_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} = 1 + \frac{1}{u_n + 1}$ .

- (b) Nous avons:

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \sqrt{2}| &= \left| \frac{u_n + 2}{u_n + 1} - \sqrt{2} \right| = \left| \frac{u_n + 2 - \sqrt{2}(u_n + 1)}{u_n + 1} \right| \\ &= \left| \frac{u_n(1 - \sqrt{2}) + 2 - \sqrt{2}}{u_n + 1} \right| = \left| \frac{(1 - \sqrt{2})(u_n - \sqrt{2})}{u_n + 1} \right| \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{u_n + 1} |u_n - \sqrt{2}| \end{aligned}$$

Or, comme  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in \mathbb{N}^*$ , nous en déduisons que  $u_n + 1 \geq 2$  et donc  $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{2} |u_n - \sqrt{2}|$ .

- (c) En itérant la précédente relation, nous en déduisons que  $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right)^n |u_0 - \sqrt{2}|$ . Or,  $0 \leq \sqrt{2} - 1 < 1$  donc par comparaison avec la série géométrique de raison  $q = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$  nous en déduisons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite convergente vers  $\sqrt{2}$ .

3. (a) Nous avons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_{n+2} = p_{n+1} + 2q_{n+1} = p_{n+1} + 2(p_n + q_n) = p_{n+1} + 2p_n + (p_{n+1} - p_n) = 2p_{n+1} + p_n$ . Il s'ensuit donc que nous obtenons une relation de récurrence d'ordre 2 pour  $(p_n)$  avec  $a = 2$  et  $b = 1$ .

- (b) La suite  $(p_n)$  vérifie donc une relation de récurrence linéaire double, dont l'équation caractéristique est  $r^2 = 2r + 1$ ; ses racines sont donc  $1 + \sqrt{2}$  et  $1 - \sqrt{2}$ . Aussi, il existe  $\lambda$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n = \lambda(1 + \sqrt{2})^n + \mu(1 - \sqrt{2})^n$ .

Les conditions initiales  $p_0 = 0$  et  $p_1 = 3$  impliquent le système  $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda(1 + \sqrt{2}) + \mu(1 - \sqrt{2}) = 3 \end{cases}$ . La résolution de ce système implique alors que  $\lambda = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$  et  $\mu = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$ , d'où nous déduisons que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n = \frac{1}{2} \left( (1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1} \right)$$

- (c) Trouvons déjà la relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ; nous avons:

$$q_{n+2} = p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + 2q_n + q_{n+1} = (q_{n+1} - q_n) + 2q_n + q_{n+1} = 2q_{n+1} + q_n.$$

Aussi, la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet-elle la même relation de récurrence que la suite  $(p_n)$ : aussi il existe  $\lambda', \mu' \in \mathbb{R}$  tels que  $q_n = \lambda'(1 + \sqrt{2})^n + \mu'(1 - \sqrt{2})^n$ . En considérant les conditions initiales, nous obtenons:  $q_0 = 1$ ,

$q_1 = p_0 + q_0 = 2$  et donc nous obtenons le système  $\begin{cases} \lambda' + \mu' = 1 \\ \lambda'(1 + \sqrt{2}) + \mu'(1 - \sqrt{2}) = 2 \end{cases}$  Nous obtenons  $\lambda' = \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}}$

et  $\mu' = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}$ , d'où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$ .

- (d) Nous avons  $p_n \sim \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1}}{2}$  et  $q_n \sim \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}}$  puisque  $|1 - \sqrt{2}| < 1$ . Il s'ensuit donc que  $u_n = \frac{p_n}{q_n} \sim \sqrt{2}$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}$ .

## Seconde partie

1. Procédons par récurrence sur l'entier naturel  $n$ .

Pour  $n = 0$ , la propriété est vérifiée.

Supposons cette propriété vraie au rang  $n$  et démontrons-la au rang  $n + 1$ . Puisque  $v_n \in [1, 2]$ ,  $v_{n+1} = \frac{1}{2} \left( v_n + \frac{2}{v_n} \right)$  est bien définie. De plus, nous avons les encadrements:  $1 \leq v_{n+1} \leq 2$  provenant de la formule de récurrence d'où  $v_{n+1} \in [1; 2]$ . Enfin, puisque  $v_n$  est un rationnel, nous déduisons de la formule de récurrence qu'il en est de même de  $v_{n+1}$ .

Nous en déduisons par le théorème de la récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n$  est bien défini et est dans l'intervalle  $[1; 2]$ .

- 2.

$$v_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \left( v_n + \frac{2}{v_n} \right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2} (v_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{v_n} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(v_n - \sqrt{2})^2}{2v_n}.$$

3. Comme  $v_n \in [1; 2]$ , nous en déduisons que  $|v_n - \sqrt{2}| \leq 1$ . On a donc:

$$\left| v_{n+1} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{2} |v_n - \sqrt{2}| \leq \left( \frac{1}{2} \right)^n |v_0 - \sqrt{2}|.$$

Il s'ensuit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \sqrt{2}$ .

## Troisième partie: Comparaison des suites

1. Nous avons

$$t_{n+1} = \frac{v_{n+1} - \sqrt{2}}{u_{n+1} - \sqrt{2}} = \frac{u_n + 1}{1 - \sqrt{2}} \times \frac{v_n - \sqrt{2}}{2v_n} t_n.$$

2. Par théorème d'opérations algébriques sur les suites convergentes, nous en déduisons que  $(t_n)$  converge vers 0.
3. Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}} = 0$ , on en déduit que la suite  $(v_n)$  converge plus rapidement vers  $\sqrt{2}$  que la suite  $(u_n)$ .