

Réduction d'endomorphismes: Exercices

Exercice 1: Exemples (simples et calculatoires) de diagonalisation et de trigonalisation

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - a. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(A - XI_2)$ de la matrice A . Précisez les valeurs propres de A .
 - b. La matrice est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? Si oui, donner sa forme diagonale ainsi que la matrice de passage associée ainsi que la formule de changement de base.
 - c. La matrice est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?
2. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a. Calculer son polynôme caractéristique χ_B , et préciser le spectre de la matrice B .
 - b. La matrice B est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Si oui, donner sa forme diagonale ainsi que la matrice de passage associée.
3. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
 - a. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_C(X)$ et donner le spectre de cette matrice.
 - b. Cette matrice est-elle diagonalisable? Est-elle trigonalisable dans $\mathbb{R}$?
 - c. Montrer que C admet un unique vecteur propre x_1 .
 - d. On désigne par (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et par u l'endomorphisme de matrice C dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $H = \text{Vect}(e_1, e_3)$ est un supplémentaire de $E_2 = x_1\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice C' de l'endomorphisme u dans la base (x_1, e_1, e_3) .
 - e. Soit $v = u|_H$ la restriction de u au sous-espace vectoriel H , et soit D la matrice de v dans la base (e_1, e_3) . Montrer que D admet $e_1 + e_3$ pour vecteur propre.
 - f. On considère à présent la famille $(x_1, e_1 + e_3, e_1)$. Justifier que c'est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice u dans cette nouvelle base (on précisera la matrice de passage associée ainsi que la formule de changement de base).

Exercice 2: Recherche des sous-espaces stables par un endomorphisme

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de u .
2. Etudier les sous-espaces propres (stables par u). A est-elle diagonalisable?
3. A présent, nous allons rechercher systématiquement tous les s.e.v. stables par u .
 - (a) Quelles sont les droites vectorielles stables par u ?
 - (b) Soit F un plan vectoriel stable par u , et soit $u|_F$ la restriction de u à F . Quel peut-être le spectre de $u|_F$? Quels sont les polynômes caractéristiques possibles? En déduire tout les plans stables par u .
 - (c) Quel sont les s.e.v. de dimension 3 stable par u ?
4. En déduire que les s.e.v. stables par u sont exactement $\{0\}$, $\text{Ker}(u - Id)$, $\text{Ker}(u - 3Id)$, $\text{Ker}(u - 3Id) \oplus \text{Ker}(u - Id)$, $\text{Ker}(u - 3Id)^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3: Déterminant d'une matrice circulante

1. Montrer que la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & a_2 \\ \vdots & & & & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

2. (★★) En déduire que la matrice M est diagonalisable, et calculer $\det(M)$.

Exercice 4: Lemme des noyaux

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $\text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u)) = \text{Ker}(PQ)(u)$.
- Soient $(P_1, \dots, P_k)$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. Montrer que $\text{Ker}\left(\prod_{i=1}^k P_i\right)(u) = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(P_i(u))$.

Exercice 5: Réduction simultanée

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{K}$. On considère deux endomorphismes f et g diagonalisables tels que $f \circ g = g \circ f$. On souhaite montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices associées aux endomorphismes f et g sont diagonales.

Pour ce faire, on raisonne par récurrence forte sur n .

- Etudier le cas $n = 1$.
- On se fixe à présent $n \geq 1$ et on suppose que le résultat est vrai pour tout espace vectoriel F de dimension $k \in \{1, \dots, n-1\}$.
 - Montrer que si l'on suppose que f est une homothétie, alors il existe une base de E dans laquelle f et g sont simultanément diagonaux.
 - On suppose à présent que f n'est pas une homothétie: aussi, f admet au moins deux valeurs propres différentes. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = \text{Spect}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f . Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ l'espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ de l'endomorphisme f associé à la valeur propre λ_i est stable par g .
 - En déduire qu'il existe une base de diagonalisation commune à f et g .

Exercice 6: Endomorphismes itérés

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie. Pour tout entier naturel n , on pose $u^0 = \text{Id}_E$, $u^1 = u$ et $u^n = \underbrace{u \circ u \circ \dots \circ u}_{n \text{ fois}}$.

- Montrer que les suites $(\text{Ker}(u^p))_{p \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Im}(u^p))_{p \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion.
- On pose $N = \bigcup_{p=0}^{\infty} \text{Ker}(u^p)$ et $I = \bigcap_{p=0}^{\infty} \text{Im}(u^p)$.
 - Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N = \text{Ker}(u^n)$ et $I = \text{Im}(u^n)$.
 - Etablir que N et I sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, stables par u et tels que $u|_N$ soit nilpotente et $u|_I$ soit bijective.
- (★★) Réciproquement, on suppose que $E = F \oplus G$ avec F et G s.e.v. stables par u et tels que $u|_F$ est nilpotent et $u|_G$ est bijectif. Montrer alors que $F = N$ et $G = I$.

Exercice 7: Matrice dépendante d'un paramètre

On note $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour $a \in \mathbb{R}^*$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A .
- A quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable?
- Etudier les sous-espaces propres de A .
- Donner une base $\mathcal{B}' = (e'_1; e'_2; e'_3)$ dans laquelle la matrice A est diagonale.
- Donner la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
- Autre méthode* Soit P un polynôme annulateur de A . Sous-quelle condition sur P est-ce que la matrice A serait diagonalisable? Vérifiez si A satisfait cette condition.