

## Réduction d'endomorphismes: Exercices

### Exercice 1: Exemples (simples et calculatoires) de diagonalisation et de trigonalisation

1. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

a. Nous avons  $\chi_A(X) = \det(A - XI_2) = X^2 + 1$ . Aussi, les racines de  $\chi_A$  sont  $\{-i, i\}$  et donc le spectre de  $A$  est  $\text{Spect}(A) = \{-i, i\}$ . Le polynôme caractéristique étant scindé à racines simples, la matrice  $A$  est bien diagonalisable.

b. Nous savons que la forme diagonale  $\Delta(A)$  de ma matrice  $A$  est obtenue par les valeurs propres sur la diagonale,

soit  $\Delta(A) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ . La matrice de passage associée est constituée par les vecteurs propres de la matrice

$A$  (en colonne). Aussi, étudions l'espace propre associée à la valeur propre  $i$ : Soit  $X_0$  un vecteur propre de la matrice  $A$  associé à la valeur propre  $i$ . Alors  $A \cdot X_0 = iX_0$ , soit  $(A - iI_2) \cdot X_0 = 0$ . Cela nous conduit au système

$\begin{cases} -ix + y = 0 \\ -x + iy = 0 \end{cases}$  d'où nous déduisons que  $y = ix$ . Aussi, le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  est-il un vecteur propre associé à la valeur propre  $i$ .

Étudions à présent l'espace propre associé à la valeur propre  $-i$ . Si  $X_1$  est un vecteur propre de  $\mathbb{R}^2$  associé à la valeur propre  $-i$ , alors nous avons  $(A + iI_2) \cdot X_1 = 0$  ce qui conduit au système  $\begin{cases} ix + y = 0 \\ -x + iy = 0 \end{cases}$ , ce qui est équivalent

à  $y = -ix$ . Aussi, le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  est-il un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $-i$ . Il s'ensuit donc

que la matrice de passage  $P$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  à la base de vecteurs propres  $(X_0, X_1)$  est  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ .

Son inverse est la matrice  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{pmatrix}$ . La formule de changement de base est  $\Delta(A) = P^{-1}AP$ .

c. La matrice n'est pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  puisque ses seules valeurs propres sont complexes.

2. a. Le polynôme caractéristique de  $B$  est  $\chi_B(X) = -(X+1)^2(X-5)$ : aussi, ses racines sont  $-1$  (racine double) et  $5$ . Le spectre de la matrice  $B$  est donc  $\text{Spect}(B) = \{-1; 5\}$ .

b. La matrice  $B$  est diagonalisable si et seulement si l'espace propre associée à la valeur propre  $-1$  est de dimension 2.

Étudions donc cet espace propre: Si  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $-1$ , alors nous avons

$B \cdot X = -X$  soit  $(B + I_3) \cdot X = 0$ . Il s'ensuit alors que  $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$  ce qui est donc équivalent  $x + y + z = 0$ .

Aussi, nous en déduisons donc que le sous-espace propre  $E_{-1}$  associé à la valeur propre  $-1$  est de dimension 2, et

donc la matrice  $B$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ . Une base en est, par exemple:  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Étudions une base de l'espace propre  $E_5$  associé à la valeur propre  $5$ . Si  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $B$

associé à la valeur propre  $5$ , alors  $B \cdot X = 5X$ , soit  $(B - 5I_3) \cdot X = 0$ . Il s'ensuit alors que les coordonnées du vecteur

$X$  vérifient le système  $\begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$ , ce qui est équivalent au système  $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$ , et donc nous

obtenons que  $x = y = z$ . Aussi, un vecteur propre de  $E_5$  est par exemple  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . La forme diagonale de  $B$  est la

matrice  $\text{Diag}(B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ , et la matrice de passage  $P$  associée est alors  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Son

inverse est la matrice  $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . La formule de changement de base est  $\Delta(B) = P^{-1}BP$ .

3. a. Le polynôme caractéristique de cette matrice est  $\chi_C(X) = -(X-2)^3$ . Aussi, son unique racine est  $2$  (racine

triple de  $\chi_C$ .

b. La matrice  $C$  est diagonalisable si et seulement si l'espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 3: on peut voir que tel n'est pas le cas, car sinon,  $C$  aurait pour forme diagonale  $\text{Diag}(2, 2, 2) = 2Id$ , et donc, pour toute matrice de changement de base  $P$ , nous aurions  $P^{-1}(2I_3)P = 2I_3$ , ce qui n'est pas (la matrice donnée dans la base canonique n'est pas  $2I_3$ ). Par contre, le polynôme  $\chi_C$  est scindé dans  $\mathbb{R}$ : aussi, la matrice  $C$  est-elle trigonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

c. Etudions alors l'espace propre  $E_2$  associé à la valeur propre 2. Si  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $C$  associé

à la valeur propre 2, alors  $C \cdot X = 2X$ , soit  $(X - 2I_3) \cdot X = 0$ , d'où nous déduisons le système 
$$\begin{cases} -1x + y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}.$$

La résolution de ce système conduit à  $x = y$  et  $z = 0$ . Aussi,  $E_2$  est un espace vectoriel de dimension 1 (une droite vectorielle), de vecteur directeur  $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

d. Soit donc  $H = \text{Vect}(e_1, e_3)$ . Comme  $\det(x_1, e_1, e_3) \neq 0$ , nous en déduisons que  $(x_1, e_1, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , d'où  $E_2 \oplus H = E$ . Dans cette nouvelle base, la matrice de l'endomorphisme  $u$  est donné par les images des vecteurs de base: aussi, nous en déduisons que  $C' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ .

e. La matrice de  $v$  dans la base  $(e_1, e_3)$  est  $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ . Son polynôme caractéristique est donc  $\chi_v(X) = (2 - X)^2$ . Etudions donc l'espace propre associé à la valeur propre 2: nous obtenons le système 
$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases},$$
 qui conduit donc à  $x = y$ . Aussi, le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_3$  est un vecteur propre, associé à la valeur propre 2.

Enfin, la matrice de  $u$  dans la base  $(x_1, e_1 + e_3, e_1)$  est  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . La matrice de passage associée est  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , dont l'inverse est  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ . La formule de passage donne  $T = P^{-1}CP$  où  $T$  est la forme trigonale de  $C$ .

## Exercice 2: Recherche des sous-espaces stables par un endomorphisme

- Nous avons  $\chi_A(X) = -(X - 3)^2(X - 1)$ .
- Les valeurs propres sont donc 1 et 3. Etudions les sous-espaces propres associés.  $E_1$  est une droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ , et  $E_3$  est aussi une droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . La matrice  $A$  n'est donc pas diagonalisable!
- Les seules droites vectorielles stables sont  $D_1 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $D_2 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . En effet, les droites vectorielles stables correspondent aux vecteurs propres...
  - Soit  $F$  un plan vectoriel stable par  $u$ , et soit  $u|_F$  la restriction de  $u$  à  $F$ . Nous avons l'inclusion  $\text{Spect}(u|_F) \subset \text{Spect}(u)$  donc les seules valeurs propres possibles sont 1 et 3. Le polynôme caractéristique  $\chi_{u|_F}$  de  $u|_F$  est de degré 2 et de plus, on a:  $\chi_{u|_F} | \chi_u$ . Aussi, nous avons comme seules possibilités:  $\chi_{u|_F}(X) = (X - 3)(X - 1)$  ou  $X - 3)^2$ .  
Si  $\chi_{u|_F}(X) = (X - 3)(X - 1)$  alors  $F \subset \text{Ker}(u - Id)(u - 3Id)$ . Or, par le lemme des noyaux, nous avons:  $\text{Ker}(u - Id)(u - 3Id) = \text{Ker}(u - Id) \oplus \text{Ker}(u - 3Id)$  (ce qui est manifestement le plan vectoriel engendré par les droites  $D_1$  et  $D_2$  précédentes).  
Si  $\chi_{u|_F}(X) = (X - 3)^2$  alors  $F \subset \text{Ker}(u - 3Id)^2$ . En calculant  $\text{Ker}(u - 3Id)^2$ , nous obtenons le plan vectoriel d'équation  $x = y$ . Aussi, nous obtenons bien un second plan vectoriel.
  - Le seul s.e.v. de  $E$  de dimension 3 est  $E$  lui-même, et évidemment  $u$  le stabilise.
- Il suffit de relister nos précédents résultats pour obtenir que tous les s.e.v. stabilisés par  $u$  sont:  $\{0\}$ ,  $\text{Ker}(u - Id)$ ,  $\text{Ker}(u - 3Id)$ ,  $\text{Ker}(u - 3Id) \oplus \text{Ker}(u - Id)$ ,  $\text{Ker}(u - 3Id)^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 3: Déterminant d'une matrice circulante**

1. Calculons le polynôme caractéristique de cette matrice:  $\det(A - XId) = \det \begin{pmatrix} -X & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -X & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -X & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -X \end{pmatrix} =$
- $(-1)^n X^n + (-1)^{n+1}$  (on développe par rapport à la dernière ligne). Aussi, le polynôme  $X^n - 1$  est annulateur de  $A$ . Or, dans  $\mathbb{C}$ , ce polynôme est scindé et à racines simples:  $A$  est-elle diagonalisable. On a  $\text{Spect}(A) = \{e^{2ik\pi/n}; 0 \leq k \leq n-1\}$ . Il existe donc une matrice inversible (complexe)  $P$  telle que  $A = PDP^{-1}$  et  $D = \text{diag}(\omega, \omega^2, \dots, \omega^n)$  où  $\omega = e^{2i\pi/n}$ .
2. La matrice  $M$  s'écrit  $M = Q(J)$  où  $Q$  est le polynôme  $Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ . On en déduit alors que  $M = PQ(D)P^{-1}$ . La matrice  $Q(D)$  est diagonale  $Q(D) = \text{diag}(Q(\omega), Q(\omega^2), \dots, Q(\omega^n))$ . Aussi,  $M$  est diagonalisable et  $\det(M) = \prod_{k=1}^n Q(\omega^k)$ .

**Exercice 4: Lemme des noyaux**

Nous devons donc montrer l'égalité de deux ensembles, ainsi que le fait que la somme est directe... Démontrons déjà que  $\text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u)) = \text{Ker}(PQ(u))$ , en raisonnant par double inclusion.

Puisque le polynôme  $P$  divise le polynôme  $PQ$ , alors si  $x \in \text{Ker}(P(u))$ , alors  $x \in \text{Ker}(PQ(u))$  puisque si  $P(u)(x) = 0$ , alors  $(PQ)(u)(x) = Q(u) \circ P(u)(x) = Q(u)(0) = 0$  (rappelons que  $Q(u)$  est un endomorphisme, donc l'image de 0 est 0). On montre alors de même que  $\text{Ker}(Q(u)) \subset \text{Ker}(PQ(u))$ . Il s'ensuit donc que  $\text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u)) \subset \text{Ker}(PQ(u))$ . Montrons l'inclusion réciproque: pour ce faire, puisque  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes  $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$  tels que  $UP + VQ = 1$ , soit donc en passant aux polynômes d'endomorphismes  $U(u) \circ P(u) + V(u)Q(u) = \text{Id}$ . Soit alors  $x \in \text{Ker}(PQ(u))$ . En appliquant la précédente relation à  $x$ , nous obtenons  $U(u) \circ P(u)(x) + V(u) \circ Q(u)(x) = x$ . Or,  $U(u) \circ P(u)(x) \in \text{Ker}(Q(u))$  puisque  $Q(u)(U(u) \circ P(u)(x)) = (QUP)(u)(x) = (UPQ)(u)(x) = (U(u) \circ (PQ)(u))(x) = U(u)(0) = 0$ . De même,  $V(u) \circ Q(u)(x) \in \text{Ker}(P(u))$  puisque  $P(u)(V(u) \circ Q(u)(x)) = (PVQ)(u)(x) = V(u) \circ (PQ)(u)(x) = V(u)(0) = 0$ . Il s'ensuit donc que  $\text{Ker}(PQ(u)) \subset \text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u))$ . On a donc par double inclusion  $\text{Ker}(PQ(u)) = \text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u))$ .

Reste alors à prouver que la somme est directe: soit  $x \in \text{Ker}(P(u)) \cap \text{Ker}(Q(u))$ . D'après le théorème de Bezout, nous avons alors  $\underbrace{U(u) \circ P(u)(x)}_{=0} + \underbrace{V(u) \circ Q(u)(x)}_{=0} = x$  d'où  $x = 0$ .

**Exercice 5: Réduction simultanée**

1. Le cas  $n = 1$  est évident, puisque toute matrice est diagonale!
2. (a) Si  $f$  est une homothétie, alors dans toute base de  $E$ , la matrice associée à  $f$  est  $\lambda I_n$ . Aussi, il suffit de considérer la base  $\mathcal{B}_g$  de vecteurs propres de  $g$  pour obtenir une base dans laquelle les deux endomorphismes sont diagonaux.
- (b) Considérons donc  $i \in \{1, \dots, p\}$  et  $x \in E_{\lambda_i}$  (c'est-à-dire que  $f(x) = \lambda_i x$ ). Montrons donc que  $g(x) \in E_{\lambda_i}$ . Pour ce faire, calculons  $f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(\lambda_i x) = \lambda_i g(x)$ , d'où  $g$  laisse stable l'espace propre  $E_{\lambda_i}$ . On en déduit en particulier que la restriction  $g|_{E_{\lambda_i}}$  de  $g$  à  $E_{\lambda_i}$  est un endomorphisme de  $E_{\lambda_i}$ .
- (c) Puisque  $f$  est diagonalisable, nous savons que  $E$  se décompose en somme directe des sous-espaces propres pour  $f$ , soit  $E = \bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}$ . Comme  $f$  n'est pas une homothétie, tous les sous-espaces propres de  $f$  sont de dimension strictement inférieurs à  $n$ , soit  $\dim(E_{\lambda_i}) < n$ . Aussi, par l'hypothèse de récurrence, il existe une base  $(e_1^i, e_2^i, \dots, e_{a_i}^i)$  de  $E_{\lambda_i}$  dans laquelle les endomorphismes  $f|_{E_{\lambda_i}}$  et  $g|_{E_{\lambda_i}}$  sont simultanément diagonaux. Aussi, en concaténant l'ensemble de ces bases, nous obtenons une base de  $E$  dans laquelle  $f$  et  $g$  sont simultanément diagonaux.

**Solution exercice 6: Endomorphismes itérés**

1. Montrons que la suite  $(\text{Ker}(u^p))_{p \in \mathbb{N}}$  est croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire que pour tout entier naturel  $p$ ,  $\text{Ker}(u^p) \subset \text{Ker}(u^{p+1})$ . Soit donc  $p \in \mathbb{N}$  et soit  $x \in \text{Ker}(u^p)$ . Alors  $u^{p+1}(x) = u(u^p(x)) = u(0) = 0$  donc  $x \in \text{Ker}(u^{p+1})$  ce qui prouve la croissance de la suite  $(\text{Ker}(u^p))_{p \in \mathbb{N}}$ . Soit à présent  $x \in \text{Im}(u^{p+1})$ . Alors, il existe  $y \in E$  tel que  $x = u^{p+1}(y) = u^p(u(y)) \in \text{Im}(u^p)$  d'où  $\text{Im}(u^{p+1}) \subset \text{Im}(u^p)$ . Il s'ensuit alors que la suite  $(\text{Im}(u^p))_{p \in \mathbb{N}}$  est décroissante pour l'inclusion.

2. On pose  $N = \bigcup_{p=0}^{\infty} \text{Ker}(u^p)$  et  $I = \bigcap_{p=0}^{\infty} \text{Im}(u^p)$ .

- (a) La suite  $(\dim \text{Ker}(u^p))_{p \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante et majorée (par  $\dim(E)$ ) d'entiers naturels, donc elle est stationnaire à partir d'un certain rang. Aussi, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall p \geq n, \dim(\text{Ker}(u^p)) = \dim(\text{Ker}(u^n))$ . De l'inclusion des ensembles, nous déduisons l'égalité  $\forall p \geq n, \text{Ker}(u^p) = \text{Ker}(u^n)$ . Il s'ensuit alors que  $N = \text{Ker}(u^n)$ .

Par le théorème de la dimension, nous avons que  $\dim(\text{Im}(u^p)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(u^p))$  d'où nous déduisons que la suite  $(\dim \text{Im}(u^p))_{p \in \mathbb{N}}$  est aussi stationnaire. Des relations d'inclusion, nous déduisons  $I = \text{Im}(u^n)$ .

- (b) Montrons que  $N$  et  $I$  sont supplémentaires. Soit  $x \in N \cap I$ . Il existe  $a \in E$  tel que  $x = u^n(a)$  et  $u^n(x) = 0$  ce qui implique que  $u^{2n}(a) = 0$ . Donc  $a \in \text{Ker}(u^{2n})$ . Or  $\text{Ker}(u^{2n}) = \text{Ker}(u^n)$  donc  $a^n = 0$  i.e.  $x = 0$ . Aussi, leur intersection est réduit à l'élément nul. Or, d'après le théorème du rang, nous savons que  $\dim(N) + \dim(I) = \dim(E)$ . De  $I \cap N = \{0\}$ , on déduit que  $I$  et  $N$  sont supplémentaires.

Montrons qu'ils sont stables par  $u$ . Soit  $x \in N = \text{Ker}(u^n)$ . Alors  $u^n(u(x)) = u \circ u^n(x) = u(0) = 0$  donc  $u(x) \in N$ . De même, si  $x \in I = \text{Im}(u^n)$ , il existe  $y \in E$  tel que  $x = u^n(y)$  et alors  $u(x) = u \circ u^n(y) = u^n(u(y))$  d'où  $u(x) \in I$ .

*Remarque:* Une façon plus rapide de faire cela est de dire que  $u$  et  $u^n$  commutent.

A présent, considérons  $u|_N$ . Nous avons  $(u|_N)^n = 0$  et donc cet endomorphisme est nilpotent.

$\text{Im} u^{p+1} = \text{Im}(u^n)$  donc  $u(\text{Im}(u^n)) = \text{Im}(u^n)$  et donc  $u|_I$  est surjective. De l'égalité des dimensions finies  $\dim(\text{Im}(u^n)) = \dim(\text{Im}(u^n))$ , on déduit que  $u|_I$  est bijective.

3. Soit  $E = F \oplus G$  avec  $F$  et  $G$  s.e.v. stables par  $u$  et tels que  $u|_F$  est nilpotent et  $u|_G$  est bijectif. Il existe donc  $p$  tel que  $(u|_F)^p = 0$  et donc  $F \subset \text{Ker}(u^p) \subset N$ .  $u|_G$  est bijective; il en va donc ainsi de  $(u|_G)^n$ . Or  $G = \text{Im}(u|_G)^n \subset \text{Im}(u^n) = I$ . Aussi, nous avons  $\dim(F) \subset \dim(N)$  et  $\dim(G) \subset \dim(I)$ . Pourtant,  $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E) = \dim(N) + \dim(I)$  ce qui implique l'égalité des dimensions  $\dim(F) = \dim(N)$  et  $\dim(G) = \dim(I)$ . Des inclusions entre ces ensembles, on déduit:  $F = N$  et  $G = I$ .

### Exercice 7: Matrices dépendantes d'un paramètre

1. On calcul le polynôme caractéristique:  $\chi_A(X) = -X^3 + 3X + 2 = (2 - X)(X + 1)^2$ .
2. Cette matrice est diagonalisable si et seulement si le s.e.v. associé à la valeur propre  $-1$  est de dimension 2 (i.e. est un plan vectoriel).
3. Etudions ce sous-espace propre:  $E_{-1}(A)$ :  $(A + Id_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ce qui conduit à  $x + ay + a^2z = 0$ . C'est bien l'équation d'un plan vectoriel (pour toutes valeurs de  $a$ ). Les vecteurs propres  $e'_1 = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = ae_1 - e_2$  et  $e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} = ae_2 - e_3$  forment une base de  $E_{-1}$ .
- Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 1 (i.e. est une droite vectorielle). Elle est engendrée par le vecteur  $e'_3 = \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = a^2e_1 + ae_2 + e_3$ .
4. Dans la base  $\mathcal{B}' = (e'_1; e'_2; e'_3)$ , la matrice  $A$  est de la forme  $\text{diag}(-1; -1; 2)$ .
5. La matrice de passage  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  est  $P = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . on exprime les coordonnées de la nouvelle base dans l'ancienne base.
6. Autre méthode: La matrice  $A$  est diagonalisable si et seulement si le polynôme  $(X - 1)(X + 2)$  est annulateur. Effectuons donc le calcul:

$$\begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ a^{-1} & -1 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ a^{-1} & 2 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$