

Examen terminal d'arithmétique

Triplets Pythagoriciens

Ce problème comporte quatre parties. La partie III est totalement indépendante des autres parties et est utilisée dans la partie IV. Les notations et résultats de la partie I sont utilisés dans les parties II et IV. Enfin, la partie IV utilise les notations et résultats de toutes les parties qui la précèdent.

★ ★ ★

On dit que trois entiers naturels a, b et c forment un triplet pythagoricien s'ils vérifient la relation $a^2 + b^2 = c^2$. Aussi, rechercher les triplets pythagoriciens revient à rechercher les triangles rectangles dont les côtés sont de longueurs entières. Par exemple, $(3, 4, 5)$ est un triplet pythagoricien.

Partie I: Restriction de la recherche

1. Montrer que (a, b, c) forme un triplet pythagoricien si et seulement si pour tout entier naturel n non nul, (na, nb, nc) forme un triplet pythagoricien.
2. Montrer que si deux des trois nombres composant un triplet pythagoricien ont un diviseur commun $d \neq 1$, alors d divise aussi le troisième nombre du triplet pythagoricien.

Aussi, dans la suite, on se limite à l'étude des triplets pythagoriciens (a, b, c) avec a, b, c des entiers naturels deux à deux premiers entre eux. Un tel triplet est appelé triplet irréductible.

3. Montrer que si (a, b, c) est un triplet pythagoricien irréductible, alors exactement l'un des trois nombres est pair et que les deux autres sont impairs.
4. En déduire que c est nécessairement un nombre impair.
Pour ce faire, on pourra raisonner par l'absurde et considérer la classe de congruence modulo 4 de c^2 .

Dans la suite, nous considérerons que le triplet pythagoricien (a, b, c) est *rangé*, c'est-à-dire que a et c sont impairs alors que b est pair (ie. on ne range plus nécessairement (a, b, c) par ordre croissant). Par exemple, $(3, 4, 5)$ et $(15, 8, 17)$ sont des triplets pythagoriciens irréductibles rangés (ie. b est pair et c est la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle).

Partie II: Détermination de tous les triplets irréductibles

Dans cette partie, on démontre une formule donnant tous les triplets pythagoriciens irréductibles rangés.

1. On considère (a, b, c) un triplet pythagoricien irréductible et rangé: aussi, b est pair et on pose $b = 2p$.
 - (a) Montrer qu'il existe $q, r \in \mathbb{N}^*$ tels que $c + a = 2q$ et $c - a = 2r$ et qu'ils vérifient $p^2 = qr$.
 - (b) Montrer que $q \wedge r = 1$ (ie. que q et r sont premiers entre eux).
 - (c) En déduire que q et r sont des carrés: on note alors $q = u^2$ et $r = v^2$.
 - (d) Montrer que $u \wedge v = 1$ (ie. que u et v sont premiers entre eux) et que $u > v$.
 - (e) Exprimer alors (a, b, c) uniquement en fonction de u et v .
2. Réciproquement, soient u, v deux entiers naturels ($u > v$) de parités différentes et premiers entre eux, et posons $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ et $c = u^2 + v^2$.
Montrer alors que (a, b, c) est un triplet pythagoricien irréductible et bien rangé.

Partie III: Résolution de l'équation de Pell-Fermat $x^2 - 2y^2 = 1$

On cherche les solutions dans $(\mathbb{N}^*)^2$ de l'équation (E) : $x^2 - 2y^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On range les solutions de (E) dans l'ordre croissant des y .

- Déterminer la plus petite (au sens de l'ordre choisi) solution de (E) .
- (a) Montrer qu'il existe deux suites d'entiers $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout entier n non nul, on ait:

$$(3 + 2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$$

Précisez l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n .

- (b) On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable: précisez sa forme diagonale D ainsi que sa matrice de passage P et P^{-1} .

- (c) Montrer alors que $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = PD^{n-1}P^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

En déduire que $x_n = \frac{(3-2\sqrt{2})^n}{2} + \frac{(3+2\sqrt{2})^n}{2}$ et $y_n = \frac{(3+2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} - \frac{(3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$.

- Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, (x_n, y_n) est solution de (E) (on pourra utiliser une relation de récurrence plutôt que la formule obtenue dans la question précédente).
On admettra que l'ensemble $\mathcal{S} = \{(x_n, y_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est l'ensemble des solutions de (E) (ie. qu'il n'y a pas d'autres solutions que celles obtenues précédemment).

Partie IV: Triplets pythagoriciens cousins

Un triplet pythagoricien (a, b, c) est dit *cousin* si deux des nombres le composant sont consécutifs. C'est par exemple le cas de $(3, 4, 5)$ (lui est même dit super-cousin, mais c'est le seul à posséder cette propriété) ainsi que de $(7, 24, 25)$.

- Montrer que si (a, b, c) est un triplet pythagoricien cousin, alors il est irréductible (ie. a , b et c sont deux à deux premiers entre eux).

On distingue les triplets cousins du premier type comme ceux pour lesquels b et c sont consécutifs des triplets cousins du second type qui sont ceux pour lesquels a et b sont consécutifs. Rappelons que puisque a et c sont tous deux impairs (les triplets considérés étant rangés), ils ne peuvent être consécutifs.

2. Triplets pythagoriciens cousins du premier type

En reprenant les notations de la partie I, donner la forme de tous les triplets pythagoriciens cousins (bien rangés) en fonction uniquement de v .

3. Triplets pythagoriciens cousins du second type

On suppose donc que (a, b, c) est un triplet pythagoricien du second type tel que $a - b = 1$.

- Montrer, en reprenant les notations de la partie I, que $(u - v)^2 - 2v^2 = 1$.
- En utilisant la partie III, exprimer u et v en fonction de x_n et y_n , puis donner la forme générale d'un triplet pythagoricien cousin du second type.