

Quelques théorèmes classiques d'analyse

Bolzano-Weierstrass

Partie I: Théorème des segments emboîtés

1. Théorème des segments emboîtés

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par I_n le segment réel $I_n = [a_n; b_n]$ avec $a_n < b_n$ (en particulier, on ne considérera pas de segment vide). La *longueur* du segment $I_n = [a_n; b_n]$ est le réel positif $b_n - a_n$. On dit que le segment I_{n+1} est **emboîté** dans le segment I_n si $I_{n+1} \subset I_n$. Aussi, si $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de segments emboîtés, alors nous avons pour tout entier n , $I_{n+1} \subset I_n$.

Dans la suite, on désigne par $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de segments emboîtés dont les longueurs tendent vers 0.

(a) Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite. Soit ℓ celle-ci.

(b) Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n] = \{\ell\}$.

2. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de réels, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes réelles m et M tels que $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$.

Comme l'intervalle $I_0 = [m; M]$ possède tous les éléments de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, au moins l'un des deux intervalles $[m, \frac{m+M}{2}]$ ou $[\frac{m+M}{2}; M]$ possède une infinité d'éléments de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: soit I_1 cet intervalle. On construit alors de même $I_2, I_3, \dots$ par le procédé suivant:

Si $I_n = [a_n; b_n]$ est supposé connu et possède une infinité de valeurs de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors au moins l'un des deux intervalles $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ ou $[\frac{a_n+b_n}{2}; b_n]$ possède une infinité d'éléments de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$; on choisit alors cet intervalle pour I_{n+1} .

(a) Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$.

(b) En déduire qu'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ .
Pour ce faire, on pourra considérer une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_{\varphi(n)} \in I_n$.

(c) Enoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass que vous venez de démontrer.

Partie II: Image continue d'un segment

Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$.

1. Supposons f non majorée sur $[a; b]$.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[a; b]$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \geq n$.

(b) En déduire qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est convergente dans $[a; b]$.

(c) En déduire une contradiction.

2. A présent, considérons que f est majorée sur $[a; b]$, mais que $M = \sup_{[a; b]} f$ ne soit pas atteint, c'est-à-dire que $\forall x \in [a; b], f(x) \neq M$.

(a) Soit g la fonction définie sur $[a; b]$ par $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$.

Montrer que g est majorée sur $[a; b]$. Soit A un majorant strictement positif de g .

-
- (b) Montrer que $\forall x \in [a; b], f(x) \leq M - \frac{1}{A}$.
- (c) En déduire une contradiction.
3. En déduire que toute fonction continue sur $[a; b]$ est bornée et atteint ses bornes.

Partie III: Application: Théorème de Rolle généralisé

Soit f une application définie et continue sur $[a; +\infty[$, dérivable sur $]a; +\infty[$, et telle que $f(x)$ tende vers $f(a)$ quand x tend vers $+\infty$.
Montrer qu'il existe $y \in]a; +\infty[$ tel que $f'(y) = 0$.