

Solution Théorèmes classiques

Partie I: Théorème des segments emboîtés

1. Théorème des segments emboîtés

- (a) Les segments $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant emboîtés, nous en déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_{n+1}$ et $b_n \geq b_{n+1}$. Aussi, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle croissante alors que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, nous savons que la longueur des segments $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$: il s'ensuit donc que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, ces deux suites sont donc convergentes et ont même limite: soit ℓ celle-ci.
- (b) Démontrons cette égalité (d'ensemble) par double inclusion:
 Nous savons (corollaire du théorème des suites adjacentes) que $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons l'encadrement $a_n \leq \ell \leq b_n$ donc nous en déduisons que $\forall n \in \mathbb{N} \ell \in I_n$. Il s'ensuit donc que $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ d'où $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n]$.
- Réciproquement, supposons que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n]$. Aussi, $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons l'encadrement $a_n \leq x \leq b_n$ et par passage à la limite, le théorème de prolongement des inégalités implique que $\ell \leq x \leq \ell$, d'où $x = \ell$. Nous avons donc bien $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n] = \{\ell\}$.

2. Théorème de Bolzano-Weierstrass

- (a) Considérons I_n . En étudiant les deux cas, nous avons $I_{n+1} \subset I_n$ donc (I_n) est une suite de segments emboîtés. De plus la longueur de I_{n+1} est la moitié de celle de I_n , d'où la longueur du segment I_n est égale à $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$. On en déduit que la suite des longueurs des segments I_n tend vers 0: il s'ensuit par le théorème des segments emboîtés qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$.
- (b) Il nous faut définir une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) qui converge (vers ℓ). Pour ce faire, remarquons que tout intervalle I_n contient une infinité de termes de la suite (u_n) : aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un élément $u_{\varphi(n)} \in I_n$ avec $\varphi(n) > \varphi(n-1)$. Définissons ainsi $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $u_{\varphi(n)} \in I_n$ et $\varphi(n) > \varphi(n-1)$. De l'encadrement $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$ implique par théorème des gendarmes que la suite $(u_{\varphi(n)})$ est convergente et de limite ℓ .
- On démontre ainsi le théorème de Bolzano-Weierstrass: toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans un compact admet une sous-suite convergente.*

Partie II: Image continue d'un segment

1. (a) La fonction f est supposée non majorée: aussi $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in [a, b]$ tel que $f(x) \geq A$. Aussi, en prenant $A = n$, on obtient l'existence d'un réel $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) \geq n$: on construit donc une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, b]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \geq n$.
 - (b) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant à valeurs dans le compact $[m; M]$, nous en déduisons d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une sous-suite convergente. Soit $(x_{\varphi(n)})$ celle-ci.
 - (c) Notons ℓ la limite de la sous-suite $(x_{\varphi(n)})$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, x_{\varphi(n)} \in [a, b]$ ($[a, b]$ est fermé), nous en déduisons par passage à la limite que $\ell \in [a, b]$. La fonction f étant supposée continue sur $[a, b]$, donc en ℓ , d'après le critère séquentiel de continuité, la suite $f(x_{\varphi(n)})$ est convergente et de limite $f(\ell)$; cela contredit le fait que $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n)$ (la suite $(f(x_{\varphi(n)}))$ ne peut avoir une limite finie, mais seulement une limite infinie). Aussi, la fonction f est-elle nécessairement majorée sur $[a, b]$.
2. (a) Considérons donc la fonction $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$. Puisque f est continue et que $\forall x \in [a, b], M - f(x) \neq 0$, nous déduisons par le théorème d'opérations algébriques sur les fonctions continues que g est continue sur $[a, b]$. Aussi, par la question précédente, la fonction g est majorée sur $[a, b]$: soit A un majorant de g sur $[a, b]$ (notons que $A > 0$).

- (b) Nous avons donc $\forall x \in [a; b]$, $g(x) \leq A$, soit $\frac{1}{M-f(x)} \leq A$. Comme $\forall x \in [a; b]$, $0 < \frac{1}{M-f(x)}$, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ nous en déduisons que $\frac{1}{A} \leq M-f(x)$ soit $f(x) \leq M - \frac{1}{A}$. Aussi, la fonction f est majorée par $M - \frac{1}{A}$.
- (c) Par définition, M est la borne supérieure de $\{f(x); x \in [a; b]\}$, donc est le plus petit des majorants de f sur $[a; b]$. Or ici, $M - \frac{1}{A}$ est un majorant de f strictement plus petit que M (car $A > 0$) d'où nous en déduisons une contradiction.
3. Nous venons donc de voir que f est majorée sur $[a; b]$ et qu'elle atteint sa valeur maximale. En raisonnant de la même façon sur la fonction $-f$, nous en déduisons que f est bornée sur $[a; b]$ et atteint ses bornes.

Partie III: Application: Théorème de Rolle généralisé

Si f est constante, alors le résultat est évident. Sinon, f n'est pas constante: il existe donc $x_0 \in [a; +\infty[$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $f(x_0) > f(a)$. Puisque f tend vers $f(a)$ en $+\infty$, il existe $A > a$ tel que $\forall x \geq A$, $f(x) < f(x_0)$. Or, sur $[a; A]$, la fonction f est majorée et atteint son majorant: ie. il existe $y \in [a; A]$ tel que $f(y) = \max_{[a, A]} f$. On peut noter que $y \neq a$ et $y \neq A$, d'où $y \in]a; A[$. Comme $\forall x \geq A$, $f(x) < f(x_0) \leq f(y)$, nous en déduisons que f atteint un maximum en y : aussi $f'(y) = 0$.